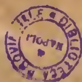


OPUSCOLI
MATEMATICI





OPUSCOLI MATEMATICI

DELLA

SCUOLA

DEL SIG.^r N. FERGOLA

PARTE GIA' PUBBLICATI, E PARTE INEDITI

VOLUME I.





NAPOLI

NELLA STAMPERIA REALE

1811.



PREFAZIONE.



Il vero scopo delle matematiche discipline si è certamente il guidar lo spirito a quell' arte sublime, che singolarmente dimostra la celeste origine dell' umana ragione, cioè all' Arte d' inventare. Imperciocchè senza di questa tutte le geometriche cognizioni, per quantunque estese, quasi non escono da' circoscritti cancelli della storica notizia di quel che dagli altri fu scritto. Ma allorchè lo spirito umano è pervenuto a questa maturità d' intellettuale energia, non solamente si conosce ciò che gli altri ne scrissero; ma si seguono gli stami delle loro scoperte, e quasi si assiste allo sviluppo intellettuale delle maravigliose teorie de' veri inventori. La ruota primordiale intanto, che può introdurre lo spirito nel campo spaziosissimo delle geometriche invenzioni è la benemerita *Analisi Geometrica*, i cui precetti si contenevano in quelle opere immortali degli antichi, che costituivano il *Luogo Risoluto*. Imperciocchè unendosi, mercè i suoi artifizj, ad universali principj le diverse famiglie de' problemi, già lo spirito ravvisa il nesso de' rapporti, ed i punti di contatto, con cui tra loro si stringono quelle sublimi verità nascoste al volgo; ed in questo quadro di magico incantesimo per chiunque ne può essere il fortunato con-

contemplatore, conosce egli la facilità delle diverse applicazioni, lo svolgimento delle altre verità affini, i sentieri, per cui si può giungere ad un termine stesso: e quindi si vede dall' ordine delle sue medesime contemplazioni introdotto in quella region fortunata, in cui per le sublimi scoperte godono l'augusta lor sede gl' inventori.

Or quest'Arte, in cui furono veramente sommi i Greci Geometri, prima che in seguito divenisse famosa nella Scuola di Platone, fiorì in quella che Pitagora stabilì in alcune Provincie del nostro Regno, chiamate dagli antichi col nome di *Magna Grecia*. Questo punto di gloria nazionale ci viene assicurato dall' opera de' *Luoghi Solidi*, che compose Aristeo Seniore, antico filosofo Crotoniate, e dalla soluzione di Archita del Problema della duplicatura del cubo; perciocchè nè potea Aristeo classificare i Problemi senza una precedente cognizione dell' Analisi Geometrica; nè Archita maneggiarla con tanta nitidezza e sagacia, se ella non avesse già in quella Scuola profondate le sue nobili radici. Era dunque un diritto della nostra gloria nazionale, che si perpetuasse questa Scienza in mezzo a noi, e se ne promovesse l'accrescimento, indirizzandola al suo termine, ch' è l'*Arte Euristica*, o sia *d' inventare*: mentre tante altre dotte nazioni, che non avevano avuta la sorte di darle la culla, vi si erano tanto nobilmente inoltrate. Ma quantunque questi forti motivi avesser dovuto costantemente animare i nostri Geometri a coltivarla; pur nondimeno non osserviamo nella nostra Sto-

Storia letteraria, ch' ella vi avesse prosperato, come già le altre scienze, e le belle lettere. Sia stato questo, perchè i Geometri, che ci precedettero, avesser creduto cosa più opportuna il trattenersi nella sola didascalica istruzione, lasciando a' posteri l' argomento di queste sublimi teorie: sia stato, che mancando di ben preparati giovani ne avessero abbandonato l' impegno: sia stato, che le diverse cariche scientifiche da essi esercitate non avesser loro lasciato tutto quell' ozio ch' era necessario a coltivare questa parte più nobile e più sublime della Geometria; o finalmente ne sia stata qualunque altra la causa a noi ignota: egli è fuor di dubbio che l'*Arte d' inventare* giacque presso noi dimenticata. Era pertanto riserbato al nostro insigne Matematico il Signor Fergola di riempiere questo vùoto ignominioso per la Napoletana Scuola di Geometria; e certamente se i Geometri suoi predecessori potessero adesso contemplare la felicità del suo geometrico cammino, si rallegrerebbero moltissimo delle glorie di un loro concittadino, e dell' utilità recata alla Nazione; giacchè l' invidia fu sempre propria degli animi vili, ed ignoranti.

Nè con minore felicità di progressi ha il Fergola promosso lo studio dell'Analisi moderna: ed è veramente una gloria tutta sua propria l' aver conosciuto egli il primo tra noi il gran segreto d' informar l'analisi, senza alterarne la natura, dello spirito della sintesi: onde ne ha poi disposte le teorie con quel metodo, e con quel rigore di dimostrazioni, con cui già scrissero della Geometria Euclide, ed Apollonio.

Or

Or sotto la guida di lui si sono quì in Napoli istituiti tanti giovani per lo spazio di ben quarant' anni, in cui ha egli sostenuta la privata sua Scuola, e la pubblica nell' Università degli Studj, con indefessa cura, unicamente indirizzata al vantaggio, ed alla gloria della nostra Nazione.

Ogni ragione adunque richiedeva, che le geometriche, e le analitiche produzioni de' suoi allievi, che già si trovavano stampate o negli Atti di straniere Accademie, o in Opuscoli volanti, si raccogliessero in un corpo, affinchè la nostra medesima Nazione, a cui in modo particolare si appartenevano, potesse esaminare i loro progressi in queste Scienze sublimi.

Con questa occasione poi vi si sono unite altre produzioni de' medesimi sugli stessi argomenti, che erano ancora inedite; e finalmente per render pregevole questa Raccolta, vi si sono inseriti molti opportuni articoli del medesimo Signor Fergola, estratti dalla sua *Arte Euristica*, e dal suo *Calcolo Sublime*, che presso noi MSS. si conservano, e che serviranno come di un saggio del merito di queste Opere, che tra breve si daranno fuori colle stampe.

Noi non entriamo quì a parlare di ogni Opuscolo particolarmente, rimettendoci per questo a quanto se n' è detto nelle note, e ne' giudizj, che gli accompagnano.

OPUSCOLO I.

DEL SIGNOR

ANNIBALE GIORDANO.

Risoluzioni di alcuni difficilissimi Geometrici Problemi.



LE Ricerche Geometriche, che mi son proposto di esporre in quest' Opuscolo, da niun altro principio germinarono, che da un *Problema di Geometria*, il quale sebbene sia piano di sua natura, e paja convenirsi a' Giovani, che con dell' uso voglian rassodarsi nell' euristiche teorie; nondimeno ha impegnato la piupparte de' più valenti Analisti del secolo trascorso. Il Signor Castiglione, l' illustre Signor de la Grange, il sommo Eulero, e dietro di lui i due Geometri di Pietroburgo Nicolò Fuss, e Giovanni Lexell han trattato con buon successo un tal problema. Ove l' insigne Signor Cramer, e con seco non pochi altri Analisti vi restaron maisempre confusi nel risolverlo, ed insiem colpiti dal dispetto in veder vani i loro sforzi, ed impotente l'Analisi Algebrica, di cui si fidavan grandemente. Del che eccone una più diffusa narrazione.

Il Signor Cramer valentissimo Analista dell' Università di Ginevra propose nell' anno 1742 al Signor Castiglione di Berlino il problema d'*inscrivere in un cerchio un triangolo, i di cui lati distesi, se fia d' uopo, passassero per tre punti dati:* ed insiem gli disse con sinceri accenti: „ Nella mia gioventù io amava come voi il Me„ todo Geometrico degli Antichi. Un vecchio Geometra per saggiar

 „ le

„ le mie forze in questo genere , mi propose il problema , che io „ vi propongo . Tentate di risolverlo , e vedrete quant' ei sia diffi„ cile “ . Il Signor Castiglione si prestò volentieri ad inviti sì gentili dell' amico . E riprendendo più volte l'analisi di un tal problema altro non vi rinvenne , che soli teoremi , i quali mentre gli mostravan vicina la soluzione , gliela tenean maisempre assai da lungi. Ei dunque disperando al par di tant' altri di risolver cotesto problema , lo lasciò interamente , e ad altri oggetti poi si diresse .

Ma questo Problema , quasicchè fosse da ignota mano animato vedeasi gir vagando tra' Geometri per adontarli . Conciossiachè nell' anno 1755 fu pubblicamente proposto in Haya per mezzo di un Anonimo : e l'illustre Bouquet il diresse benanche al Signor Castiglione , incoraggiando questo Geometra a risolverlo . Il Signor Castiglione in questa seconda rimessa del Problema raddoppiò gli sforzi del suo ingegno . E nulla ottenendone da' suoi tentativi , si rivolse finalmente a Pappo , di dove carpì due Lemmi , che gli procurarono la tanto desiata risoluzione . Ma questa intanto ne uscì sì tardi , che , al dir di lui , più non si parlava nè del Problema , nè dell'Anonimo : e nell'anno sessantesimo sesto del secolo trascorso fu all' Accademia di Berlino comunicata , che fu di sprone al sommo Signor La Grange a compierne un' altra analitica assai preclara.

Anche io cercai di snodar Problema sì famoso per vie diverse, e più brevi di quelle del Castiglione . Ed avendone di ciò parlato ad un Geometra di mia confidenza , ei mi disse , che il vigesimosecondo Lemma del *Lib.* 7. delle *Collez. Mat. del Pappo* me ne avrebbe agevolata l'analisi , e la risoluzione . Or tanto avvenne : appena io lessi cotesto Scrittore , che mi riuscì di sciogliere un tal Problema con applicarvi due volte di seguito quel Lemma . E volendo progredir più oltre , il disciolsi benanche in generale per un qualunque numero di punti , che diansi col cerchio .

Dopo

Dopo alcuni anni, da che io composi questi miei qualunque siensi geometrici lavori, pervennero in questa Capitale i Volumi IV, e V degli Atti nuovi dell'Accademia di Pietroburgo, ove lessi con piacere le soluzioni del Problema del cerchio e de' tre punti, fatte dal sommo Eulero, e dall'insigne Nicolò Fuss, e vi ammirai le analitiche riflessioni sparse dal Lexell sull'Analisi del Signor Lagrange. E quindi aggiunsi altre ricerche in questo mio Opuscolo.

Intanto ho voluto produr queste mie disquisizioni, non solo per merito dell'argomento, ma per far benanche intendere quanto in molti casi all'Analisi la Sintesi prevalga. Onde non so, se abbiansi a dire o più ingrati, o più stolti tutti coloro, che, spregiata la Geometria loro comune madre, s'impegnano a coltivare i metodi dell'Analisi moderna, senza più pensarne a decentemente geometrizzare. L'Ugenio, il Newton, il Leibnitz, i Bernulli, l'Eulero, l'Alembert, i Riccati, ed altri, col corredo dell'un metodo, e dell'altro, che furon loro come due ale, seppero volare sì bene nelle Scienze del *Quanto*, ed in quelle altresì della Natura. Ma or si pensa, che tarpandone una, ed impiumando l'altra, si possa volar più celere, e più in alto (a).

PROP.

(a) Il Signor Giordano, che non appartenevasi alla Società Italiana, come mai potè comunicarle cotest'Opuscolo, dagli atti della quale l'abbiamo estratto? Eccone di ciò il racconto. Alcuni Letterati di nostra Nazione non deferendo a' giusti elogj, che il Signor Fergola faceva di questo suo Allievo, gliene dimandarono un attestato da' Dotti stranieri. Il Balì Sagramosa s'impegnò di ciò ottenete dal suo amico il Brigadier Lorgna, che presedeva all'Accademia Italiana, e figurava tra' primi Analisti de' tempi suoi. Ond'egli a tal oggetto gli diresse il detto Opuscolo fatto dal Giordano in pochi dì, e per un saggio di didascalico profitto. Ma chi il crederebbe? Il Brigadier Lorgna non pur co' detti contestò il valore di cotesto ingegnoso giovanetto, ma il fece altresì col fatto, inserendo negli atti di detta Società l'Opuscolo anzidetto, cui l'Autore non avea data una tal destinazione. E perciò noi ci abbiam presa la libertà di modificarlo alquanto.

PROP. I. PROBL.

§. 1. *Nel dato cerchio NDG iscrivere un triangolo DEF, i di cui lati prolungati passino pe' tre punti dati A, B, C posti in linea retta.* O sia (secondo lo stile degli antichi) *inclinare ADB, e mettere in direzione le rette EF, FC.*

Tav. I. Fig. 1. *Sol.* Si unisca la retta ABC, alla quale s'intenda condotta per E la parallela EG, e poi la congiunta GF si distenda in H. E perchè l'angolo EGF adequa sì l'angolo EDF, che l'altro FHB, saranno uguali i due angoli DAB, FHB: e quindi saranno simili i due triangoli DAB, FHB, che hanno anche l'angolo DBA di comune, e sarà AB : BD :: BF : BH. Onde il rettangolo ABH sarà uguale al dato FBD, e con ciò ne sarà dato il punto H.

Si tiri per G al medesimo circolo la tangente GK, che incontri AC in K; sarà dato ancora il punto K. Imperocchè l'angolo HGK è uguale all'altro GEF; ma questo a cagione delle parallele EG, AC, adequa il suo alterno FCH; sarà dunque l'angolo HGK uguale all'altro FCH. E quindi essendo simili i due triangoli HGK, HFC, starà CH : HG :: HF : HK, e ne sarà il rettangolo CHK uguale al dato FHG. Laonde sarà dato il punto K, e si ridurrà il Problema a condurre dal punto K la tangente KG al circolo NDG,

PROP. II.

PROP. II. PROBL.

§. 2. *Nel dato cerchio NDG iscrivere il triangolo DEF, i di cui lati distesi passino pe' tre punti dati A, B, C.*

Sol. Si unisca la retta AB, alla quale s'intenda condotta per E la parallela EG, e poi congiunta la GF, si protragga in H. Sarà dato il punto H, potendosi ciò dimostrare con quell'istessa brevità che nel Problema precedente. *Fig. 2. n. 1.*

Similmente unita la HC, si concepisca tirarlesi per E la parallela EI, e congiunta la IG, si distenda in K. Sarà, nell'istessa guisa che prima, dato il punto K; imperocchè l'angolo EIG costituisce due retti, sì coll'angolo EFG, che coll'altro HKG (*a*); dunque l'angolo EFG, o l'altro HFC, sarà uguale all'angolo HKG: ed essendo equiangoli e quindi simili i due triangoli HFC, HKC, sarà CH : HG : : HF : HK, ed il rettangolo KHC uguale al dato FHG; e con ciò n'è dato il punto K. Ed essendo le rette EG, EI rispettivamente parallele alle rette HB, HC, sarà l'angolo IEG uguale al dato CHB; ed uniti i raggi LG, LI, sarà dato il suo duplo GLI, e quindi ciascuno degli angoli alla base del triangolo isoscele GLI; e con ciò l'angolo LGK conseguente di uno di essi. E perciò costruendosi sopra di LK una porzione di cerchio capiente un tale, angolo, l'intersezione di questa col circolo NDG, determinerà il punto G.

§. 3. *Scol.* Da questa semplicissima Analisi Geometrica si deduce la seguente composizione del Problema, che rapportiamo in grazia della celebrità di esso, ed affinchè si vegga che la sua dimostrazione non ha bisogno di alcun lemma, nè di deduzione ad assurdo.

Costr.

(a) 13. *Elem.* 1. e 22. III.

Fig. 2. n. 2. *Costr.* Congiunta la AB, si divida la medesima in H, sicchè il rettangolo ABH pareggi il quadrato della tangente condotta per B al circolo DIF. Similmente unita la CH, quest' altra retta si divida in K, talchè il rettangolo CHK sia uguale al quadrato della tangente tirata da H al medesimo circolo. Dal punto H si elevi ad AD la perpendicolare HM, e si costruisca su di LK una porzione di circolo capiente l'angolo CHM, che intersechi il circolo NIF in G. Inoltre si congiunga la retta HG, che tagli questo cerchio in F: indi si uniscano le BF, CF, che prodotte incontrino di nuovo il medesimo circolo in D ed E; e finalmente si tiri la AD, che dico passare per E, sicchè DEF sarà il triangolo richiesto.

Dim. Si congiungano le rette KGI, EG, EI, e da L si cali su di KI la perpendicolare LO. E perchè il rettangolo KHC è uguale dalla costruzione all'altro FHG, sarà CH : HG : : HF : HK. Ed i due triangoli FHC, HKG, che anche hanno l'angolo GHC di comune, saranno fra di loro simili, e l'angolo HKG adequerà l'altro HFC, o sia EFG. Or questo costituisce due retti coll'angolo EIG. Dunque saranno ancora gli angoli HKI, EIK uguali a due retti, ed EI ne sarà parallela ad HC.

Inoltre gli angoli GLO, LOG sono uguali all'esterno LGK, o sia a CHM. Dunque toltovi di comune l'angolo retto, resterà l'angolo OLG, o sia IEG uguale all'angolo CHB. Ma dalla dimostrazione EI ne giace parallela ad HC, dunque lo sarà pure EG ad HB, e l'angolo EGF uguaglierà il suo alterno FHB. Or dalla costruzione il rettangolo HBA è uguale all'altro FBD, onde n'è AB : BD : : BF : BH, dunque i due triangoli FHB, DAB, che hanno l'angolo ABD di comune, ed i lati intorno ad essi proporzionali, saranno simili, e l'angolo FDA sarà uguale all'altro FHB; ma si è dimostrato esser questo uguale all'angolo EGF, dunque saranno uguali i due angoli FDA, FGE, e perciò AD passerà per E.

§. 4.

§. 4. *Scol.* Per brevità, tralascio i differenti casi di questo Problema; vale a dire di supporre che i punti A, B, C sien tutti dentro del circolo, o pure che uno o due di essi ne sien dentro: giacchè le soluzioni sono molto analoghe alla presente, e di leggieri si ravvisa il filo delle medesime. E ciò dovrassi anche intendere pe' seguenti Problemi.

PROP. III. PROBL.

§. 5. *Nel dato cerchio DFG iscrivere il triangolo DEF, di cui due lati DE, DF passino per due punti dati A e B, e per l'altro C la retta FC, che col terzo lato EF costituisce un dato angolo in F.* Fig. 3.

Sol. Si conduca ad AB la parallela EG, e congiungasi la GF; questa segnerà in AB il dato punto H. Si unisca la HC, e si divida in K, sicchè il rettangolo KHC adequi il dato FHG; e congiunta la KG, si distenda la medesima in I, e si tirino le rette EI, LG. Dico che sia dato il punto G, talchè IEG sia il triangolo richiesto.

E perchè sono simili i due triangoli HKG, HFC, che hanno l'angolo GHC di comune, ed i lati intorno ad esso proporzionali; saranno uguali i due angoli HKG, HFC. Ma questo coll'angolo EFH, o sia EIG (*a*) costituisce un dato angolo EFC. Dunque sarà data la somma de' due angoli HKI, EIK, e perciò le rette EI, HC se si producano, dovranno incontrandosi costituire un dato angolo: Or le rette HC, HB son date di posizione, dunque ancora EI incontrando la AB deve formare con essa un dato angolo. Ma questo poi è uguale all'altro IEG, a cagione delle parallele EG, AB. Dunque

(*a*) 13. *Elem.* 1. *e* 22. *III.*

que è dato un tale angolo IEG, e conseguentemente l'altro LGK; e 'l punto G.

Scol. 1. I due seguenti Problemi si possono risolvere con un artifizio simile a quello del precedente. Le loro soluzioni si ritrovano a disteso nel *Vol. IV.* degli *Atti di Verona*, e noi le abbiamo omesse come non confacenti al nostro scopo (*a*).

1. *In un dato cerchio iscrivere un triangolo, di cui un lato passi per un dato punto; e per gli altri due punti dati vi passino le rette, che co' due rimanenti lati costituiscano angoli dati a' loro estremi.*

2. *In un dato cerchio iscrivere un triangolo, sicchè condotte da tre punti altrettante rette a due degli angoli del medesimo, queste comprendano co' rispettivi lati angoli dati.*

Scol. 2. Il chiarissimo Sig. Lexell in una sua *Memoria sul Problema del cerchio e de' tre punti* inserita negli Atti dell'Accademia di Pietroburgo per l'anno 1780, prendendo occasione da un tal Problema, s'indusse, com' ei stesso dice, a tentare l'altro consimile d'iscrivere in un cerchio dato un quadrilatero, del quale i lati opposti concorressero a punti dati. Egli però ben tosto si accorse, che un tal Problema era indeterminato; non pertanto questa sua geometrica disquisizione il condusse a rinvenire una singolarissima proprietà di questa specie di quadrilateri iscritti ne' cerchi. Una tal proprietà, della quale io ne recherò una dimostrazione più elegante di quella che il Signor Lexell ne dà nella sua Memoria, e che rilevo dallo stesso Lemma di Pappo, è la seguente.

(*a*) Noi ammiriamo l'ingegno di questo giovanetto nell' aver rilevate queste verità; ma poteva raffinarsi più il metodo di esporle.

PROP. IV. TEOR.

§. 8. *Se del quadrilatero CDEF iscritto nel cerchio MDG i due lati opposti DC, EF convengano nel punto A, e gli altri due DE, CF, nell'altro B; io dico che congiunto un di questi punti A col centro L del cerchio, ed abbassata dall'altro punto B sulla AL la perpendicolare BP, dovrà stare* Tav. I. Fig. 4.

$LP : LM :: LM : LA$.

Dim. Uniscasi la AB, alla quale si conduca per C la parallela CG, e tirata la GE, si prolunghi fino ad H.

E perchè il rettangolo ABH adequa il quadrato della tangente condotta da B al cerchio, ossia (congiunta la LB) la differenza de' quadrati di LB, e di LN, ed è similmente il rettangolo BAH uguale alla differenza de' quadrati di AL, e di LM (*a*); sarà l'intero quadrato di AB uguale a' due quadrati di AL e di LB, toltone il doppio quadrato di LM. Ma i quadrati di AL e di LB per la 13. Elem. II. eccedono il quadrato di AB pel doppio rettangolo ALP; è dunque questo doppio rettangolo uguale al doppio quadrato di LM, e perciò ALP uguale ad LM^2, ed $LP : LM :: LM : LA$.

§. 9. *Scol.* Per mezzo dello stesso Lemma di Pappo si risolve anche con semplicità il seguente Problema, del quale niuno di que' Geometri, che si sono occupati su queste ricerche, ha fatto menzione.

(a) Imperocchè comprendendo due retti coll'angolo CGE sì l'angolo CFE o AFB, che l'altro AHE, faran questi uguali tra loro. E quindi i triangoli AFB, AEH che hann' oltre a ciò l'angolo EAB di comune, faran simili, e perciò dee essere AB : AE :: AF : AH; ed il rettangolo di AB in AH uguale all' altro di AE in AF.

PROP. V. PROBL.

Tav. I. Fig. 5. §. 10. *Nel dato cerchio GMI iscrivere il quadrilatero MNPQ, i di cui lati distesi passino pe' quattro punti dati A, B, C, D.*

Sol. Si uniscano le rette AB, CD, le quali si producano finchè s' incontrino in X; si tirino per M ad esse rispettivamente le parallele MI, MG, e si congiungano le IPH, GPK. Saranno dati i punti H e K. Ma l'angolo HPK è uguale all'altro IPG, ossia IMG (*a*), o pure al dato CXA. Si è dunque trovato il punto P, alla quale ricerca il proposto Problema si riduce (*b*).

§. 11. *Scol.* La più importante indagine su questo geometrico assunto è il seguente generalissimo Problema, che nè tampoco è stato da altri finora tentato, e che io passo a risolvere valendomi dello stesso principio.

PROP. VI. PROBL. generale.

Tav. I. Fig. 6. §. 12. *Nel dato cerchio MNP iscrivere il poligono MNOPQ di tanti lati quanti sono i punti dati A, B, C, D, E, pe' quali quelli debbon passare.*

Sol. Uniscasi la AB, alla quale s' intenda condotta per M la parallela MR, e congiungasi ROH. Similmente si unisca la HC, e tiratavi per R la parallela RS, si congiunga SPK. E di nuovo unita la DK le si tiri per S la parallela ST, e congiungasi TQX. Indi uniscasi EXY, alla quale si tiri per T la parallela TV, e si congiunga

(*a*) 13. *Elem.* I. *e* 22. *III.*
(*b*) *Ved. Probl. II.*

ga VMY. E così si continui a fare se vi sieno più punti dati. Saran dati gli angoli MRS, RST, STV ec. del poligono MRSTV, come quelli che pareggiano rispettivamente i dati AHK, HKX, KXY ec. Se dunque è pari il numero de' lati MR, RS, ST, TV ec. di questo poligono (il che ha luogo quando la figura da iscriversi ha un numero impari di lati), comprendendo angoli dati il primo di essi lati MR col secondo RS, il terzo ST col quarto TV ec., sarà dato l'intero arco MRSTV ec., e quindi la sua sottesa MV; e perciò anche il punto M, dal quale poi tutti gli altri V, O, P, Q ec. restan facilmente determinati.

Che se poi il poligono MNOPQ ec. da iscriversi abbia un numero pari di lati, sarà impari quello delle rette MR, RS, ST, TV ec.; e quindi la MV non verrà ad essere la sottesa di un arco dato. Intanto in questo caso, essendo pari il numero delle rette RS, ST, TV ec., sarà dato l'arco RSTV ec., e quindi l'angolo RMV; e perciò distesa YMV in F, sarà anche dato per le parallele RM, AB, l'angolo VFA; ond'è, che anche in questo caso resterà determinato il punto M (*a*).

(a) Il primo caso di queſto Problema ſi riduce ad *inclinare da un dato punto ad un cerchio una retta, ſicchè l'intercetta ſia data*, cioè a *ritrovar due rette reciproche a due date, che abbiano una data differenza*. E l'altro alla 23. *El.* 1.

OPUSCOLO II.

GIUDIZIO DEGLI EDITORI

Sulle varie soluzioni del Problema del cerchio e de' tre punti prodotte da Geometri illustri.



§. 1. IL Problema d'iscrivere in un cerchio un triangolo, i di cui lati distesi, se sia d'uopo, passino per tre punti dati, è il principal soggetto di cotesta geometrica dissertazione. Noi che la diamo in luce con altri Opuscoli del medesimo Autore, e con que' di tanti altri Geometri istituiti nella nostra Scuola, ci facciamo un dovere di aggiungerne alcune riflessioni su i Metodi di tali Ricerche praticati da Geometri illustri.

Metodo del Signor Giordano.

§. 2. Il Signor Giordano nell'età di quindici anni, e quasi all' istante (*a*) seppe compiere al detto Problema una elegantissima geometrica soluzione, che può dirsi di genio Greco. Ella ne risulta immediatamente da un ovvio Lemma di Pappo, applicato due volte di seguito a pochi tratti di un'Analisi Geometrica, e ne riduce il Problema a dover descrivere su di una retta data un segmento di cer-

(*a*) Mentre in un dì il Maestro del Signor Giordano intrattenevasi ad istruire nell'Analisi sublime il Marchese Berio, coltissimo Cavaliere di nostra Nazione; cotesto giovanetto ch'era seco si ritirò in disparte per leggere un tal Lemma delle *Collezioni Matematiche di Pappo*: e ben tosto videsi brillar di gioja nell'aver conseguita la rapportata soluzion del Problema.

cerchio capiente un angolo dato. Intanto per ricordare ai Leggitori cotesto Lemma, di cui più volte dovremo valerci, sarà bene quì rapportarlo, e poi esibirne precisamente l'Analisi suddetta (a).

LEM. I.

Tav. I. Fig. 1. §.3. *Se dagli estremi A, e B della retta AB data di posizione s'inflettano ad uno stesso punto D della circonferenza DEG le due rette AD, BD, e poi da un punto E delle loro sezioni E ed F conducasi la EG parallela alla data AB; la retta che congiunge l'altro punto F coll'estremo G dell'anzidetta parallela, dovrà sempre incontrare in un dato punto H la retta AB.*

Dim. Imperocchè i due triangoli FHB, DAB, che han di comune l'angolo in B, han pure uguali i due angoli BHF, ADB, come uguali al terzo EGH: dunque sarà BF : BH :: AB : DB, e 'l rettangolo ABH uguale al dato DBF. Onde sarà dato il punto H.

Anal.

(a) Per convalidare questo nostro giudizio sulla soluzione del Sig. Giordano, noi quì ne rechiamo il sentimento, che ne dà di essa il Brigadier Lorgna negli Atti della Società Italiana.

„ Questo scritto è stato mandato da Napoli alla Società dal Signor Balì Co. „ de' Sagramosi sin dal dì 2 Ottobre 1787; sicchè il Geometra, che n'è l'Autore, „ il compose nella tenera età di poco più che sedici anni. Parvemi pertanto di- „ cevole il dargli luogo negli Atti della Società sì per questo, che per essere stati „ occupati intorno allo stesso soggetto prima del nostro Giovanetto diversi illustri „ Matematici, e sì ancora per il di più, ch'egli fece risolvendo il Problema prin- „ cipale in tutta la sua generalità con facile metodo, che ricorda non già pro- „ priamente la Sintesi, ma l'Analisi degli antichi.

Ed il Signor Malfatti nell'Introduzione del suo Opuscolo su questo argomento così parla del Signor Giordano: „ Corre ora una voce, che un valoroso gio- „ vanetto di 16 anni Napoletano abbia superato se stesso con una soluzione breve „ ed ingegnosa non solo del Probl. de' tre punti; ma eziandio del Probl. genera- „ lizzato a qualunque numero di punti si voglia.

§. 4. 1. Sieno A, B, C i tre punti dati, ed EDF il triangolo richiesto. *Tav. I. Fig. 2. n. 1.* Dal punto E conducasi la EG parallela alla data AB, e vi si unisca la GF. Questa retta in virtù di tal Lemma dovrà passare per lo dato punto H della AB.

2. Si congiunga la retta HC, alla quale si meni per E la parallela EI, e si unisca la IG. Anche quest'altra retta dovrà per lo stesso Lemma passare per lo dato punto K della HC.

3. Ed essendo date di posizione le rette EG, ed EI, che son parallele alle date AB, HC, sarà dato l'angolo GEI, ch' esse comprendono: e ne sarà benanche dato il suo duplo GLI, congiungendone i due raggi LG, LI, e la LK. Il perchè sarà puranche dato l'angolo LGI alla base del triangolo isoscele GLI, e quindi il suo conseguente LGK.

Dunque il Problema si vedrà ridotto a descrivere sulla data LK un segmento di cerchio capiente un angolo dato.

Metodo del Signor Castiglione.

§. 5. Prima di esporre le geometriche ricerche del Signor Castiglione, e di valutarle, convien dimostrare il seguente Lemma di Pappo, del quale si avrà bisogno in molte di queste geometriche disquisizioni.

Lem.

Lem. II.

Tav. II. Fig. 1. §. 6. *Se dal punto G preso nel diametro prodotto AB del cerchio AFB si tiri ad esso una qualunque segante EG, e dal punto E, ch'è una delle due sezioni, si conduca l'ordinata ED ad un tal diametro; la retta DF, che unisce l'altro estremo D di cotesta ordinata coll'altro punto F delle sezioni, dovrà sempre incontrarne il detto diametro in un dato punto H.*

Dim. Si uniscano le rette DA, AE, AF. Ed essendo DE perpendicolare al diametro AB, sarà l'angolo DAB uguale all'angolo BAE. Ma l'angolo DAB è uguale all'angolo HFB, poichè sono nella stessa porzione, e l'angolo BAE è uguale all'angolo BFG (a) per lo quadrilatero BAEF. Dunque l'angolo HFB è uguale all'angolo BFG, e con ciò dee essere GF : FH :: GB : BH.

„ Ciò posto tirisi la HX parallela alla EF, sarà l'angolo HXF „ uguale all'alterno EFA, o sia ad AFD, essendo gli archi AE ed AD „ uguali; e perciò HX sarà uguale ad HF (b). Ma pe' triangoli si- „ mili AGF, AHX, è AG : AH :: GF : HX o sia HF : ed è poi „ GF : FH :: GB : BH (c); quindi sarà AG : AH :: GB : BH, e la „ AG divisa armonicamente in H e B.

§. 7. *Scol.* Noi abbiamo creduto tornar molto a proposito il distender quassù per comodo di chi legge la dimostrazione di questo Lemma di Pappo. E poichè nel testo ella rinviensi mutilata in fine, noi ne abbiam recato un buon racconciamento fattovi da un nostro Geometra, il quale ci sembra preferibile a quella dimostrazione indiretta e ben lunga che vi appose il Commandino.

§. 8.

(a) 13. *Elem.* I. *e* 22. *III.*
(b) 6. *Elem. I.*
(c) 3. *Elem. VI.*

§. 8. La soluzione del detto Problema fatta dal Signor Castiglione sebbene sia da meno di quella del Giordano, ella è non per tanto egregiamente tornita, e secondo le leggi della buona Sintesi. Il Valentuomo adotta l'indicato Lemma di Pappo, e vi aggiunge benanche il trigesimo del detto Libro delle *Collezioni Matematiche* di esso Scrittore, cioè il quassù rapportato. Intanto per l'ammassamento di questi due Lemmi, e di certe inutili rette, e triangoli, che osservansi nell'Analisi del Castiglione, la di lui soluzione è più greve, e men venusta di quella del Giordano. Ma ella poi non è sì deforme, come ce la dipinge il Professor Malfatti: imperciocchè, sgravandola da quelle inutili ricerche, potrà essere assai gradevole a' Geometri. Ed eccone cotest'.

Anal. Geom. semplificata.

§. 9. 1. Sieno A, B, C i tre punti dati, ed EDF il triangolo richiesto. Dal punto F si conduca la FG parallela alla data AB, e si unisca la EG. Questa retta in virtù del primo Lemma dovrà passare per un dato punto K della AB. *Tav. II. Fig. 2.*

2. Si unisca il centro L del dato cerchio col detto punto K; e sulla LK si abbassi dal punto G la perpendicolare GRO, e poi si congiunga la OE. Cotest' altra retta per lo Lemma II. dovrà segnare il dato punto Q nel diametro NM.

3. Ciò posto, essendo date di posizione le due rette GF, e GO; sarà dato l'angolo OGF, o il suo uguale OEF. Ma i lati di questo secondo angolo passano rispettivamente pe' dati punti Q, e C. Dunque il Problema vedrassi ridotto a costituire sulla retta QC un segmento di cerchio capiente un angolo dato.

§. 10. *Def.* 1. Il punto K della AB può dirsi *punto di riunione delle trasversali, che vi cadono dalla parte corrispondente del cerchio*: e ve ne sarebbe un altro delle trasversali dall' altra parte opposta.

§.11. *Def.* 2. Il punto Q, ove quel diametro che passa per K, è diviso armonicamente, può dirsi *punto di armonica divisione*.

§. 12. Ed eccone su di ciò un utile e preclarissimo Principio, che, come più giù dirassi dal Signor D. Giuseppe Scorza, è il seguente geometrico Porisma.

Se da' dati punti A e B s' inflettano ad un medesimo punto D della circonferenza EDN le due rette AD, BD, e vi si congiungano per la EF le due sezioni E ed F; questa retta dovrà formare un angolo dato con quell' altra retta, che da una di dette sezioni conducesi al punto di armonica divisione. Cioè a dire l'angolo FEQ sarà sempre dato. Del che in appresso.

Metodo del Professor Malfatti.

§.13. Il Signor Malfatti segue fedelmente la prima metà della soluzione del Signor Giordano, o di quella del Castiglione, e poi par
Tav. I. Fig. 2. n. 1. che ripieghi a diverse indagini, cioè ad inclinar da due punti dati A e B ad un altro D della circonferenza le due rette AD, BD, sicchè la EF, ch' è tra le sezioni, riesca parallela ad una retta data di sito. Ma questa tal ricerca, ch' egli antepone in un Lemma (*a*), è identica sì nella natura, che nell' eseguimento alla composizione geometrica del Signor Fuss. Dunque noi possiamo veracemente concludere la soluzione del Professor Malfatti non esser diversa da quelle di questi Geometri che nell' industre congegnamento (*b*).

Me-

(*a*) Breve risoluzione di questo Lemma (che avrebbesi dovuto dir Problema). Sia EF parallela ad una retta data, e EG all'altra AB che congiunge i dati punti A e B, sarà dato l'angolo FEG, e quindi il suo duplo FLG, che è al centro. E vi sarà dato ancora l'esterno LFH del triangolo isoscele FLG. Ma è dato il punto H per lo Lemma I. Dunque su di LH dovrà costituirsi un segmento di cerchio capiente un angolo dato.

(*b*) Queste tre soluzioni sintetiche del Problema de' tre punti e del cerchio, ebbe-

Metodo degl' Illustri Geometri Leonardo Eulero, e Nicola Fuss.

§.14. Nel IV. Vol. degli Atti nuovi di Pietroburgo avvi una soluzione del detto Problema maestrevolmente ordita dal sommo Eulero, ove alcuni Principj geometrici, e certe geometriche grandezze veggonsi con delle algebriche divise, forse per iscortarne i raziocinj. Egli adotta quel I. Lemma di Pappo, e poi vi dimostra fra le altre cose le tre verità seguenti. Cioè:

I. *Se nella base AB di un qualunque triangolo AOB si prendano i due punti F e G ugualmente distanti dalla perpendicolare calata dal vertice O su di essa, la differenza de' quadrati de' lati OA, OB è uguale al rettangolo dell' intera base nella differenza delle sue parti estreme AF, BG.* Tav. II. Fig. 3.

II. *Se da' dati punti A e B s' inflettano ad un qualunque punto P della circonferenza aPb le due rette AP, BP, e sia F il punto di riunione delle trasversali, che sono a destra; ei dovrà distar tanto dal centro del cerchio, quanto ne dista l' altro punto G delle trasversali a sinistra* (a). Fig. 4.

III.

ebbero delle genesi speciose, che convien quì rapportare. La soluzione del Castiglione fu un distillato di profusi sudori di un Geometra Tedesco. Quella del Signor Giordano fu un colpo di genio; e l'altra del Malfatti emerse all' eco, com' ei dice, di quella del Giordano.

(a) La prima di queste tre verità è quasi intuitiva, e le altre due con brevi sintetici ragionamenti si possono conseguire.

Dal centro O del dato cerchio si abbassi la OS perpendicolare alle due corde *am*, *bn*, che son tra loro parallele. Ella dovrà passare pe' punti medj di queste: ed oltre a ciò dovrà bisecare l' angolo verticale del triangolo isoscele *a*V*m*, incontrandone la BA ad angoli retti in S. Ed avendo i due triangoli FVO, GVO i due lati FV ed VO uguali agli altri GV ed VO; ed uguali gli angoli FVO, GVO compresi da essi, sarà la base OF del primo uguale all' altra

OG

Tav. II. Fig. 3. III. *E la tangente condotta al cerchio dal punto F, o dall'altro G, sarà media proporzionale tra i segmenti estremi della data AB (b), cioè tra le rette AF, e BG.*

Or il Valentuomo, dopo di aver dimostrate analiticamente queste tre cose, ed alcune altre, vi riduce il Problema alla seguente indagine, cioè: *Congiunto un certo punto della riunione delle trasversali col centro del dato cerchio, vuol formarsi in esso centro e con tal retta un angolo, tal che il suo coseno abbia una ragion data a quello di un angolo dato.* Ma il Signor Fuss in un'altra Memoria, ch'è d'appresso a quella dell'Eulero, vi rende più semplici, e più geometriche coteste investigazioni: e sì le une che le altre son degne di gran lode.

Metodo del sommo Analista il Signor de la Grange.

§. 15. I. La soluzione di questo Problema eseguita con dell'Algebra comune dal sommo Signor La-Grange ha de' voli analitici sublimi, che noi quì segneremo per utile di chi legge. Or egli nel condurla con buon successo vi dimostra analiticamente il seguente Principio, che

OG dell'altro. E sarà pure FS uguale ad SG. Ed essendo, come l'è chiaro, *ar* : *mr* :: GS : SF, sarà GS uguale ad SF, e quindi i due punti G ed S saranno equidistanti dal punto S, ed anche dal centro O del detto cerchio.

O pure essendo isosceli e simili i due triangoli *a*V*m*, FVG, sarà *a*G uguale ad *m*F. Ma son pure uguali le O*a* ed O*m*, e gli angoli O*a*G, O*m*F. Dunque sarà la base OG uguale all'altra OF.

(*b*) Ed essendo OA^2 uguale ad OF^2 con AF^2, e con 2AFS, o pure con AFG (*Dim. prec.*), sarà lo stesso OA^2 uguale ad OF^2 con GAF. E tolti d'ambe le parti Og^2 ed Of^2, resterà BAF uguale ad FP^2 con GAF. Sicchè togliendosi anche GAF, vi rimarrà AF.BG uguale ad FP^2.

Ed ecco in pochi versi di Sintesi l'intera dissertazione del valentissimo Analista.

che *in ogni Triangolo la differenza di due lati divisa per la loro somma debba pareggiare il prodotto della tangente della semisomma degli angoli alla base per la tangente della metà dell'angolo verticale*: e 'l Signor Castiglione da due Lemmi Geometrici vel deriva. Ma noi crediamo, che ciò non sia un affare di più lemmi, o di nuovi giri di calcoli moderni: una lieve riflessione su i Principj della Trigonometria Rettilinea basta a tal ricerca.

II. Infatti per poter ciò intendere si bisechi per la OK l'angolo verticale NOA del triangolo AON, e per la OH il suo conseguente NOG; diverrà l'angolo NOK complemento di NOH, per esser retto l'angolo KOH, come ne appare: ed ei sarà benanche complemento della semisomma degli angoli in N ed A. Onde dovrà essere Tang. NOH = Cot. NOK. Inoltre col centro O intervallo ON, ch'è il minor di que' due lati, si descriva il cerchio NM, che dovrà segare la NA in M: onde congiunta la OM, sarà l'angolo AOM differenza degli angoli A ed OMN, o del suo uguale ONM. Ma pe' Teor. di Trig. si sa essere il quoto di AO—ON per AO+ON uguale a quello di Tang. ½ AOM per Tang. NOH. Dunque sarà *Tav. II. Fig. 5.*

$$\frac{AO-ON}{AO+ON} = \text{Tang.}\frac{\frac{1}{2}AOM}{\text{Cot.}NOK} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}AOM \,.\, \text{Tang. } NOK \,.$$

III. Oltre di questo principio il sommo Geometra ne adotta benanche un altro, ch'è assai noto in Trigonometria, cioè che debba essere Tang. $(\varphi-\theta) = (\text{Tang.}\,\varphi - \text{Tang.}\,\theta) : (1+\text{Tang.}\,\varphi\,.\,\text{Tang.}\,\theta)$, e così poi ne deriva tre simmetriche equazioni, e le maneggia. Cioè si congiunga il centro O del dato cerchio co' dati punti A, B, C, e supposto esser PNM il triangolo richiesto, si chiamino a, b, c le congiunte OA, OB, OC respettivamente, ed r il raggio di tal cerchio; e poi si dinotino per s, t, v le rispettive tangenti delle metà degli angoli ignoti AOM, AON, AOP, e per le p, q quelle degli *Tav. II. Fig. 6.*

degli angoli noti AOB, AOC. Sarà in virtù di quei due principj applicati a' triangoli AON, BOP, e COP;

$$\text{I.} \quad st = \frac{a - r}{a + r} = A$$

$$\text{II.} \quad \frac{s - p}{1 + ps} \cdot \frac{v - p}{v + pv} = \frac{b - r}{b + r} = B$$

$$\text{III.} \quad \frac{t - q}{1 + qt} \cdot \frac{v - q}{1 + qv} = \frac{c - r}{c + r} = C$$

Ove le A, B, C esprimano per brevità di calcolo i secondi membri di coteste equazioni, i quali veggonsi essere grandezze note. Intanto il Valentuomo maneggiandole con un saggio metodo di eliminazione fa emergerne un' equazione quadratica determinata avente la sola s per ignota; cioè la sottoposta

$$(CK - Gq)s^2 + (CH - AG + (CK - F)Aq)s = A(F - CHq),$$

in cui si sien poste per brevità di calcolo le

$$B - p^2 + (1+B)pq = P$$
$$(1+B)p - (1 - Bp^2)q = G$$
$$-(1+B)p + (B - p^2)q = H$$
$$1 - Bp^2 + (1+B)pq = K$$

§.16. I valori delle proposte ignote son dunque assai complessi, ed onusti di termini asimmetrici, tal che pajono incapaci di costruzione, ch'è la principal cosa che vuolsi ottenere ed ottener bene nel risolvere i Geometrici Problemi. Ed in vero il sommo Eulero dubitò forte della possibilità di siffatta costruzione. E 'l Sig. Lexell impiegandone 14 pagine in 4º a poter costruire due di essi valori, così conchiude del terzo: *At tamen facile patet constructionem pro angulo z satis esse perplexam, nec ullum adhuc nobis se se obtulit artificium, quo hae espressiones . . . . . per angulos vel arcus in figura facili negotio inveniendos construi se paterentur.* E che dovrà

vrà dirsi di cotesti analitici risultati, quando sien più che tre i dati punti, e vi si chiegga d'iscrivere nel cerchio un poligono di altrettanti lati che passino per essi punti? Ma noi conchiudiamo esser più che umani i tratti euristici di quest' analitica soluzione del Signor la Grange, e se è assai malagavole il costruirla, colpa non è del grand' uomo, ma dell' arte.

Riflessioni su di alcune Ricerche affini del Sig. Lexell.

§.17. Il Sig. Lexell dopo di aver geometricamente costruito quegli analitici valori quassù indicati, si propose il Problema d'*iscrivere in un Cerchio un Quadrilatero, talchè i lati opposti di tal figura concorressero a' punti dati*. Egli in tal ricerca s'avvide, che cotesto Problema categoricamente espresso era *indeterminato*, e l'indicò nel seguente modo: *Huic quaestioni infinitas numero respondere solutiones perspexi*. E continuando coteste speculazioni, vi scoverse un' elegante proprietà de' Quadrilinei iscritti in un cerchio, cioè quella che il Signor Giordano ha quì sopra nitidamente, ed in conformità de' suoi principj dimostrata (§.8.). Intanto il detto Giordano su di ciò espresse negli Atti di Verona un Paradosso euristico, cioè che questo Problema generalmente concepito era *piucchè determinato*, e che diveniva *indeterminato* con apporvisi una certa limitazione. E noi tra questi due pareri sulla natura del Problema sì discordi, come ci conterremo?

A noi pare, che cotesta proprietà de' quadrilinei iscritti in un cerchio non sia nuova, e che proposta nel vero aspetto, come ora il facciamo, renda que' due Geometri concordi. Infatti, *se da un punto esistente fuori di un cerchio gli si conducano due tangenti, e due seganti; le rette, che uniscono le sezioni superiori e le inferiori delle seganti, deggion convenire in un sol punto colla ret-*

ta

ta fra contatti; *o pur esserle parallele*. Ed ecco dalle parti interiori di dette seganti, e dalle congiungenti delle loro sezioni emergerne il Quadrilineo richiesto. In esso la retta fra contatti è perpendicolare a quel diametro che passa pel proposto punto. E questa segante centrale è armonicamente divisa dalla curva e dalla retta fra contatti. I conici del Signor la Hire, quelli dell' Ab. Grandi, e quegli altri del nostro Ab. Giannattasio rapportano cotesta proprietà del Cerchio. E 'l Signor Wolffgango Krafft, Socio con Lexell nell'Accademia Petropolitana, avea ciò avvertito fin dall'anno 1753 nelle sue *Istituzioni di Geometria Sublime* §. 88.

Dunque i due punti dati, perchè il detto Problema sia possibile, deggion esser talmente posti, che ciascheduno di essi stia nella retta che unisce i contatti delle tangenti menate dall' altro punto al cerchio. E 'l Problema enunciato con questa limitazione sarà indeterminato, come lo avvertì saggiamente il Signor Giordano. Onde per renderlo determinato converrebbe aggiugnervi qualche altra condizione, cioè che un di quei lati passi benanche per un punto dato, comprenda un dato angolo con un altro, ec.

OPU-

OPUSCOLO III.

DEL SIGNOR

D. GIUSEPPE SCORZA:

Nuove speculazioni sull' istesso argomento.



§. 1. Di già volgea l' anno settantesimo sesto del secolo trascorso, o il trigesimo quarto, da che il Problema del Cerchio, e de' tre punti si aggirava tra' Geometri, quando il Signor Castiglione piccatosi di riuscirne, compì nitidamente un tal lavoro, e fu di sprone ad altri, che in altre guise il medesimo Problema risolvessero. Ma in quel tempo, chi 'l crederebbe! Roberto Simpson Inglese, e Mattia Stewart di Edimburgo, che potran chiamarsi *Geometrarum facile Principes* (a), isvelarono un Porisma di Euclide, che di coteste investigazioni può esser copiosa vena. Imperocchè il primo di essi imbattendosi in queste oscure indicazioni di Pappo *Οτι ηδε ητοι εν παραθεσει εςαι, η μετα τινος ευθειας επι το δοθεν σημειον νευσης δοθεισαν περιεχει γωνιαν*, *quod quae in parathesi erit vel una cum aliqua recta linea ad datum punctum vergente datum continet angulum*, s' indusse a credere, che quivi si proponessero due rette inflesse da due punti dati alla circonferenza di un cerchio

4 dato

(a) Roberto Simpson vien riputato il più sagace Sintetico tra' matematici della Gran Brettagna, i quali si fanno un pregio di voler su di ciò l'accuratezza Greca emulare.

dato di sito e di grandezza. E per esserne sicuro di un tal concetto, il diresse a quel Geometra di Edimburgo, cui pregò caldamente, che il ponderasse. Or questi non solo aggradì una cotale geometrica conghiettura, ma s'ingegnò benanche di animarla con rigida dimostrazione; e sì n'emerse quel Ciclometrico Porisma, ch'è la cinquantesima settima Proposizione del Simpson, e l'ultimo, com'egli il crede, de' Porismi di Euclide. Intanto il Signor Simpson finì di vita prima di applicarlo a risolver de' difficili Problemi, come far dovea. E 'l Castiglione, che il tenea tra le sue ricerche, e sotto mentite forme, perchè nol riconobbe all'arrivo dell'Opera del Simpson? A me non cale il rintracciar le ragioni del non fatto: è ben di applicarne un tal Porisma a risolver famiglie di difficili Problemi, perchè si comprenda il pregio, e l'energia di questo sublimissimo Ramo del Luogo Risoluto degli Antichi (a).

PROP.

(a) Con un tal Porisma Euclideo si possono risolvere assai bene, oltre a' Problemi proposti in questi Opuscoli, anche tant'altri con dati affini, come si è praticato da alcuni de' nostri valenti giovanetti. E con ciò intendiamo di autorizzare la natura de'Porismi destinata a sciorre difficilissimi problemi, e certe di loro famiglie di una pari malagevolezza, onde parci, che i seguenti versi di Pappo, che han travagliato molti Eruditi, debbansi a questo modo interpetrare: Πορισματα εστιν Ευκλειδου πολλοις αθροισμα φιλοτεχνοτατον εις την αναλυσιν των εμβριθεστερων προβληματων, και των γενων απεριληπτον της φυσεως παρεχομενης πληθος. *Porismata Euclidis sunt opus artificiosissimum in analysin difficillimorum Problematum, (eorumque) generum, quorum immensam multitudinem præbet natura (porismatum).*

PROP. I. PORISMA.

§. 2. *Se da due punti dati A e B inflettansi alla periferia del dato cerchio DEG le rette AE, BE, che di nuovo lo incontrino ne' punti D ed F; dovrà la retta DF delle loro intersezioni formare ad un suo estremo un angolo dato con un' altra tendente ad un punto dato.* Tav. III. Fig. 1. 2.

Dim. Si tiri dal punto D la DG parallela ad AB, che ne congiunge i dati punti A e B; e di poi si unisca la GF, che segnerà nella retta AB il punto dato H (*a*), e questo punto dato H si congiunga col centro C del cerchio mediante la retta HC, cui si abbassi la perpendicolare GM, che incontri la circonferenza nel punto I; e si unisca la FI, la quale ne incontrerà il diametro nel dato punto K (*b*). Ciò premesso, l'angolo DGI è dato, avvegnachè formato da due rette DG, GI, date di sito. Dunque sarà dato del pari il suo uguale, ovvero il supplemento a due retti DFI, ch' è formato dalla retta DF delle intersezioni delle due rette inflesse coll' altra FI tendente al dato punto K. C. B. D.

§. 3. *Cor.* 1. Dato il cerchio PEQ, ed i due punti A e B, che possiam dirli delle *inflessioni*, si potrà esibire ciascun de' due punti di *tendenza* con due terze proporzionali. Cioè prendendo BG terza proporzionale in ordine ad AB e la tangente condotta al cerchio dal punto B: e troncando dalla congiunta OG un' altra OH terza proporzionale dopo la detta OG e 'l raggio del cerchio Og. Sarà H uno de' detti punti di tendenza, e così potrà rinvenirsi anche l'altro. Tav. II. Fig. 3.

§. 4. *Cor.* 2. Si abbassi dal centro O la OS perpendicolare alla data AB, e presa la OD terza proporzionale in ordine ad OS ed

(a) *Lem. I. Opusc. prec.*
(b) *Lem. II. Opusc. cit.*

al raggio OE del cerchio, si descriva sopra di OD come diametro il cerchio DHO. Questo sarà il *luogo di tutti que' punti di tendenza, che corrispondono a' punti delle inflessioni situati nella AB*.

§. 5. *Cor.* 3. Da' punti A e B si possono inflettere al dato cerchio PEQ due rette, tal che la congiungente delle sezioni riesca parallela alla AB. In tal caso le tangenti menate a questi punti segneranno nella AB i due punti G ed F delle riunioni delle trasversali; e si vedrà chiaramente, ch' essi debbano essere equidistanti dal punto S, come lo avea per altre vie dimostrato l' Eulero. E dalle verità di questi Corollarj si potrebbero risolvere varj Problemi delle inflessioni, che a' Giovanetti potranno essere una lodevole occupazione.

§. 6. *Scol.* L' addotta dimostrazione è diversa da quella del Simpson nel numero de' casi, ch' ei distingue, e nell' orditura delle ragioni. Intanto dal centro C si abbassi CH perpendicolare su di AB terminata in A, e vi si faccia il rettangolo AHB uguale all' altro QHP. Sarà il quadrato di CB uguale a' due quadrati di CH ed HB. Onde togliendosi gli uguali quadrati di CF e di CP, resterà il rettangolo EBF uguale al quadrato di HB ed al rettangolo QHP, cioè al quadrato di HB, ed al rettangolo AHB, ossia al rettangolo ABH: e sarà similmente il rettangolo BAH uguale all' altro EAD. Ed in tal caso ne risulterà il quadrato di AB uguale alla somma o alla differenza de' rettangoli EAD, EBF, o de' quadrati delle tangenti condotte al cerchio da' punti A e B, secondo che il punto H cade tra i punti A e B, o al di fuori di essi. Ma unito il punto H colle intersezioni delle inflesse AE, BE, mediante le rette HDI, HFG, sarà per l' inversa del I. Lemma (a) la IG del pari che la DF parallela alla AB, e quindi perpendicolare alla CH. Dunque pel II. Lemma (b) la retta DG

Tav. III. Fig. 1.

(a) §. 3. *Opusc. II.* (b) *Idem* §. 6.

DG delle intersezioni incontrerà il diametro nel dato punto K di armonica divisione.

§.7. *Scol.* 2. Intanto i due punti di concorso A, B de' lati opposti del quadrilatero DCFE iscritto nel cerchio, hanno le condizioni dello Scol. prec. (*a*). Dunque la diagonale DF che unisce le intersezioni delle due BFC, ACD inflesse nel punto C della circonferenza, dovrà passare per quel punto di armonica divisione. Similmente l'altra diagonale CE, che congiunge le intersezioni della stessa BFC e dell'altra AFE, inflesse al punto F della circonferenza, dovrà passarne per lo stesso punto K di armonica divisione. Dunque l'intersezione di queste due diagonali dovrà cader sempre nell'istesso punto K. E perciò *se diensi i punti di concorso de' lati opposti di un quadrilatero iscritto in un cerchio, sarà anche dato quello delle sue diagonali.* *Tav. I. Fig. 4.*

PROP. II. PROBL.

§. 8. *Dati quanti punti si vogliano A, B, C, D, E ec., ed il cerchio FGI, iscrivere in esso il poligono FGHIK, i di cui lati passino rispettivamente per que' punti dati.* *Tav. III. Fig. 3.*

Anal. Suppongasi iscritto il richiesto poligono nel dato cerchio: E poichè il primo lato FG di esso poligono, ed il secondo GH deggion passare per i dati punti A, e B, dovrà la retta FH delle loro intersezioni formare ad un suo estremo l'angolo dato FHN colla retta HN tendente al dato punto H (*b*); e sarà dato l'arco FN. Ma cotesta retta HN inflettesi col terzo lato HI, che dee pas-

(*a*) *Ved. la Dim. del Giordano.*

(*b*) *Porisma prec.*

passare pel punto dato C. Dunque per lo stesso Porisma la retta delle intersezioni NI formerà ad un suo estremo un angolo dato NIO colla retta IO tendente al dato punto i; e sarà dato l'arco NO, e con ciò l'altro FO, che sarà somma, o differenza de' dati archi FN, ed NO. Così pure questa retta tendente IO inflettesi col quarto lato IK del poligono. Dunque la retta OK delle sezioni formerà ad un suo estremo un angolo dato coll'altra KP, tendente al dato punto m; e sarà dato l'arco OP, e quindi l'altro FP, che sarà pure somma, o differenza de' due archi dati FO, ed OP. E così appresso, finchè si pervenga ad una tendente PK, la quale inflettesi coll'ultimo lato KF del poligono. In tal caso sarà dato l'arco sottoposto PF, e con ciò l'angolo alla circonferenza FKP e il suo conseguente EKm.

Dunque si ridurrà il Problema a descrivere sulla data retta Em una porzione di cerchio capiente quell'angolo dato. C. B. F.

§. 9. *Cor.* 1. Il Problema del cerchio e de' tre punti resta immediatamente risoluto dal Porisma.

§. 10. *Cor.* 2. Che se poi de' tre dati punti, due abbiano le condizioni dello Scol. prec. e 'l terzo sia quello dell'armonica divisione, il Problema sarà indeterminato. E lo stesso dovrà dirsi convenevolmente del Probl. generale. Lo che non è stato da altri avvertito, come dovevasi.

PROP.

PROP. III. PROBL.

§. 11. *Dato il cerchio minore ABCD in un emisfero, dividerlo in un dato numero di archi AB, BC, CD, DA, ec. sicchè i cerchi massimi condotti per gli estremi di ciascheduno passino per altrettanti punti dati G, H, I, K ec. nella superficie di esso emisfero.* *Tav. III. Fig. 4.*

Anal. Suppongasi diviso il dato cerchio ABCD nel modo richiesto. E poichè il primo arco AB è tale, che il cerchio massimo condotto pe' suoi estremi A, e B dee passarne pel dato punto G; il raggio CG disteso dovrà incontrare il proposto piano in un punto *g*, che sarà dato. Ed un tal punto essendo sì nel piano del cerchio ABCD, che dell'altro CGBA, dovrà trovarsi nella comune sezione di essi, cioè nella AB. Dunque la corda AB del primo arco dee passare pel punto dato *g*. Lo stesso s'intenda delle corde degli altri archi successivi BC, CD, DA, ec., che deggion pure passare rispettivamente pe' punti dati *h*, *i*, *k* ec. Dunque il Problema si riduce ad iscrivere nel dato cerchio il poligono ABCD; i di cui lati AB, BC, CD ec. passino per altrettanti punti dati *g*, *h*, *i*, *k* ec. Lo che può farsi per il Problema prec. C.B.F. (*a*).

§. 12.

(*a*) Il sommo Eulero indicò la risoluzione di questo Problema per tre punti dati nella superficie dell'Emisfero. Ma essa non v'è indicata chiaramente, come può vedersi da questo ragionamento tratto da una sua memoria dell'Accademia di Pietroburgo 1780. *Concipiatur planum sphæram in centro circuli tangens, super quo triangulum planum modo præscripto jam sit constructum, ejusque translatio ad superficiem sphæræ erit facillima, cum anguli circa centrum in superficie tam plani, quam sphæræ sint idem, distantia vero punctorum datorum, & angulorum trianguli a centro sphæræ in tangentes abeant.*

§. 12. *Scol.* Questo Problema geometrico potrebbe convertirsi in un altro geografico assai leggiadro, che io quì proporrò per dimostrare l'utilità di tali speculazioni. Cioè: *Dato un parallelo terrestre, ed un numero* n *di luoghi nell'istesso emisfero, si vuol dividere tal cerchio nel numero* n *di archi, sicchè i cerchi massimi condotti per gli estremi di ciascheduno passino pe' dati luoghi rispettivamente.* E volendo rendere più universale quel geometrico Problema si potrà enunciar quest'altro. *Dato un cerchio in un qualunque solido di rivoluzione, ed il numero* n *di punti nella superficie di esso, dividere tal cerchio nel numero* n *di archi, sicchè le sezioni che conduconsi per gli estremi di ciascun arco, e per un dato punto nell'asse dello stesso solido, passino co' loro perimetri per que' punti dati respettivamente.* In simil guisa *dato un cono, ed il numero* n *di punti nello spazio, si potrebbe addimandare d'iscrivere in questo solido una piramide del numero* n *di lati, le di cui facce passino per quei punti respettivamente.* O *dato un cilindro, ed il numero* n *di punti nello spazio, vuol iscriversi in esso un Prisma anche del numero* n *di lati, sicchè le facce di tal solido passino per que' punti respettivi.* E così di altri.

CON-

Conclusione degli Editori.

A noi punto non lice il voler calibrare l'eleganza, onde questa famiglia di malagevoli Problemi quì vedesi risoluta, con de' nostri didascalici principj, in varie guise. Un equo Leggitore, che l'arte possegga dell'inventare, ha diritto di estimarli. Ma intanto non vi mancan de' Dotti, che vedendo la chiarezza, e la semplicità di certe geometriche speculazioni, le credon volentieri di facile indagine, o che l'avrebbon potuto anch'essi rilevare all'istante: ed in ciò confondono la percezione di quel che si è ritrovato coll'entità di ritrovarlo; quasi che fosser cose uguali il veder bene un oggetto, ed il saperlo produrre sì perfetto. Gli Elementi di Euclide, ed i Quadri di Raffaello, così loro parliamo, sono i parti i più naturali della Ragion dell'uomo, e della di lui Immaginazione; ma essi ne son pure i più rari: e niuno mai ha ardito di poter sì l'uno, che l'altro emulare. Il Problema delle quattro rette fu risoluto con pochi giri di Analisi dall'ingegnoso Signor delle Carte, e dal sommo Newton con due versi di Sintesi leggiadra: ma intanto una tal ricerca la più energica sapienza de' Geometri della Grecia confuse. L'*Enigma Fiorentino*, ed il *Paradosso* del Conte Fagnani nel rinvenir due archi ellittici, la cui differenza sia rettificabile, terrebbero tuttavia attoniti i Matematici, se chiare soluzioni non si fosser date all'un Problema, ed all'altro. Ed or talun le crede agevoli o frivole ricerche: e così in simili casi dall'eleganza delle altrui speculazioni il disprezzo di queste, o di quello ei ne ritrae. Intanto, per non più digredire, questi Problemi, che posson chiamarsi *refrattarj*, han pure un'indole speciosa: ed è che chi tenta di risolverli, ne resta smarrito, malgrado i lumi del suo ingegno, e l'arte che possegga. Laddove quei, che si arrestano a'soli temi o a leggerne le altrui nitide soluzioni, li credon lievi oggetti della Ra-

 gione,

gione, o un degno esercizio di Scuola (*a*). Ma il Sig. Cramer diceva al Castiglione, parlando del più facile di questi Problemi, *tentate di risolverlo, e sì vedrete quanto l' è malagevole*. E questi dopo di averlo risoluto con immensi stenti, par che gli rispondesse: *Ho voluto risolver questo Problema per liberar dalla noja i Geometri che ne avrebbon intrapreso lo snodamento.* E quindi se non valgon le voci del Cramer e del Castiglione a liberar que' Dotti da simili precipitanze intellettuali, che sono più incomode ad altri, che ad essi, noi li consigliamo a starne saldi su questo Canone di Logica, ove prescrivesi, che *solamente coloro che sono stagionati nell' inventare, han diritto dalla condotta dell' argomento di estimarne la difficoltà dell' indagazione. E quegli altri poi, che non son usi, o non son potenti a ciò fare, si regolino dagli aggiunti dell' argomento: cioè a dire dal tempo in che speravasi una tal ricerca, dal valor di coloro, che vi s' impegnarono, dal giudizio de' Savj, ec.* (*b*). Ed in fine, inerendo a' desiderj

(*a*) Uno ſpirito dimoſtratore, cui manchi l'arte d' inventare, ch' è una virtù dianoetica diverſa dall' abito di dimoſtrare, non può eſtimare le altrui invenzioni, che dalla facilità, o dalla difficoltà d' intenderle. Ed in ciò ei sbaglia di molto. In fatti alcuni Profeſſori di queſta Capitale in leggendo quel I. Opuſcolo del Sig. Giordano, l'ebbero a vile, ed in diſpreggio, come ſe foſſervi frivole diſquiſizioni. Ma il Lorgna, il Malfatti, il Carnot, ed altri Geometri illuſtri lo han reputato un ammirabile lavoro.

(*b*) Eraſi già ſtampato il II. Opuſcolo di queſta Raccolta, quando ci è pervenuta la Geometria di poſizione del Signor Carnot diſtintiſſimo Matematico delle Gallie, dalla quale carpendone alcune coſe al noſtro ſoggetto concernenti, le rechiamo quì appreſſo.

„ Il Signor Giordano, così ei dice nel Probl. 45. di detta Opera, „ nell'età di 16 anni trovò non ſolamente una ſoluzione ſintetica eſtre- „ mamente elegante del Problema del Cerchio, e de' tre punti, ma gli „ diede tutta la generalità poſſibile, applicandola a' Poligoni iſcritti di un „ nu-

siderj del Signor Giordano, preghiamo i coltivatori della Geometria Analitica a due, o tre coordinate, di voler risolvere e costruire, giusta i loro metodi, e per nostro gradimento i Problemi generali di coteste mirabili iscrizioni, e di altre ricerche affini.



„ numero qualunque di lati. Il Caſtiglione recò a quel Problema una ſo-
„ luzione ingegnoſiſſima, ma complicata. Il Signor Lexel avea ſaggiato
„ di adattar la ſoluzione al Quadrilineo inſcritto nel Cerchio, ma non
„ vi riuſcì in alcun modo. E così di altre ſoluzioni ec.

Ma noi crediamo eſſergli a grado la ſoluzione del Caſtiglione da noi quassù ſimplificata. E riſpetto al Lexel gli ricordiamo, che queſto Geometra di Pietroburgo non impreſe a riſolvere il Problema quaſsù indicato, ma quello sì bene di dover iſcrivere in un Cerchio un Quadrilineo, ſicchè i ſuoi lati oppoſti concorreſſero a due punti dati. Che queſto Problema, ch'ei diſſe indeterminato, abbia biſogno di una certa limitazione per eſſer tale: e che non era nuova quella proprietà de'Quadrilinei iſcritti in un cerchio, che il Lexel preteſe di averne rilevata.

OPUSCOLO IV.

Estratto da un Manoscritto di Analisi Sublime di un nostro Geometra.

Delle Funzioni Fratte, e del Risolvimento loro in Frazioni Parziali.



Tra i varj argomenti, che contengonsi ne' Metodi Sommatorj de' Geometri Moderni, niuno sembra esser più venusto, e più completo di quello, che ad integrare i Fratti Razionali or si destina. Le Teorie dell'Analisi sublime, che gli son confluenti, come sarebber quelle dell' Equazioni Identiche, delle Funzioni Circolari, delle Logaritmiche, ec., e le molte verità illustri, che vi si veggion brillare, ne formano la venustà dell' argomento. Il Teorema Ciclometrico (*a*) del Cotes, quell'altro affine del Moivre, il Principio del Bernulli nel ridurre in archi reali di cerchio i logaritmi di quantità immaginarie, il Teorema volgarmente detto dell'Alembert, ed anche quell'altro del Mac-Laurin, di cui talor ci varremo, sono le principali di coteste verità, che doveansi a' giovani rammentare.

Ma qual n' è mai l' adeguatezza di cotesto esimio argomento, e l' importanza, che gli si ascrive? „ Concessa la risoluzione dell' „ Equazioni Algebriche, non vi ha fratto Razionale, che non s' inte-

„ gri:

(a) Un nostro Analista ha comunicato alla Real Accademia delle Scienze di Napoli una nuova, e diretta dimostrazione del Teorema Ciclometrico del Cotes, la quale ci sembra assai facile, ed insiem rigorosa,

„ gri: e siffatte Integrazioni alla quadratura riduconsi delle linee di „ secondo ordine (*a*), che Sezioni Coniche appelliamo. Inoltre la „ piupparte delle Formole Differenziali, che son libere da grandez- „ ze trascendenti, nel trasformarsi in razionali, nel pomerio del no- „ stro argomento si riducono, per esserne poi integrate (*b*).

Intanto questo nobilissimo lavoro non si può eseguire in alcun modo, se ciascun de' Fratti da integrarsi non siasi anteriormente risoluto in certe convenevoli sue parti. E queste opere preliminari (*c*) son più di quel lavoro malagevoli. Il sommo Eulero espose

sag-

(*a*) Giovanni Bernulli, e Rugiero Cotes, che furono i principali fabri di queſta Teoria, ſi eſprimono su di ciò diverſamente, ſebbene ſien concordi tra loro, e con noi. Il primo avverte, che l'integrale della frazione $pdx:q$, ove le p, e q ſieno funzioni razionali della x, può darne una funzione algebrica della ſteſſa x, o può ridurſi *alla quadratura del Cerchio*, o *dell' Iperbole*. E l'altro vi aggiunge, che queſti due ſi riducano *alla miſura degli angoli, o de' rapporti*.

(*b*) In conferma di ciò, che ſi è indicato in queſto diſcorſo proemiale, può ridurſi all' integrazione de' fratti razionali l'integrale della formola differenziale $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, ſe l'eſpreſſione $\frac{m}{n}$ ſi trovi eſſere un numero intero negativo: o pur ſe ſiavi un intero negativo, o poſitivo quest' altra eſpreſſione $\frac{m}{n}+\frac{r}{s}$, come l'è noto dagli Elementi di Calcolo Integrale. E ponendo $H=\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx)}$, $K=\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{r}{s}}$, $L=\left(\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right)^{\frac{r}{s}}$, la formola differenziale Xdx, ove la X ſia una funzione razionale delle x ed H, o delle x e K, ſi ridurrà in razionale. Ed anche tale ne diverrà quest' altra $X\frac{dx}{x}$ quando ſiavi la X funzione razionale delle x^n ed L. E così potrebbeſi qualche altra rapportare di ſimil riducimento.

(*c*) Baſta ſaper ridurre l'integrale del fratto $\frac{dx}{(1+xx)^n}$ a quello di quest' altro $\frac{dx}{(1+xx)^{n-1}}$, che n'è più ſemplice, per poterſi ogni fratto razionale integrare: imperocchè le integrazioni degli altri fratti razionali, che da queſte non dipendono, ſono chiare di per se ſteſſe.

saggiamente cotesta previa calcolazione in più luoghi delle sue Opere: cioè nel secondo, e nel duodecimo Capo dell'Introduzione all' Analisi degl' Infiniti, nell' ultimo Capitolo del Calcolo Differenziale, nel quarto, e nel quinto volume degli Atti Nuovi di Pietroburgo, e forse altrove altre ricerche ei pur ne fece. E tali cose si credon sì chiare, e perfette, che chi a rifar le imprende, par che le intralci, o le verghi servilmente.

Ma pure non è ciò, come altri il crede. Coteste Teorie dell' Eulero, che son quivi sistemate col Metodo Ramistico, e nel cammino di un Genio che inventa, si dovrebbon ridurre in un Sistema Didascalico Euclideo in grazia degli Apprenditori. Onde converrebbe accuratamente definire qual sia il *Fratto Analitico Genuino*, e quali le sue *Parziali*, dimostrandone anteriormente la possibile risoluzione di quello in queste. Di più abbozzati i metodi antichi di un tal risolvimento, dovrebbonsi proporre, e dimostrare i nuovi con eleganza, e renderne le regole di essi di facile comprensione, e ritenevoli.

Anche dovrebbonsi questi calcoli liberare da grandezze immaginarie, da funzioni circolari, e da un treno di malagevoli operazioni. In fatti quando vuol determinarsi col Metodo Euleriano il numeratore di quella parziale, che abbia per suo denominatore un fattore duplice reale, o una sua potenza, a quali stenti non soggiace un giovane Analista nel dovere le dette grandezze maneggiare? E nè anco i risultati generali proposti dal Valentuomo per accomodarli a' casi particolari, costan meno di fatica di quell' altra: e poi converrebbe di aver sempre seco coteste formole per poterle agli ovvj casi applicare.

Or noi, che quì imprendiamo ad agevolar sì sublime, ed utile argomento, in tre Opuscoli il distinguiamo. Nel primo di essi si propongono i Principj illustratori delle Teorie, e del maneggio, che

vi

vi si conviene. Nel secondo vi rechiamo le precise Regole, che debbonsi osservare nel risolvere un Fratto Genuino nelle sue parziali. Ed esse non son, che quattro assai brevi, chiare, e ritenevoli, e purgate benanche da immaginarie grandezze, e da funzioni circolari. E per vie più chiarirle, e renderle a' giovani familiari, le corrediamo di alcuni esempli, che abbiamo tratti dall' Eulero, non perchè non avrebbersi potuto escogitar degli altri in confacevol modo; ma affinchè in un tal parallelo di soluzioni il pregio del Metodo nostro risaltasse. Finalmente il terzo de' detti Opuscoli contiene alcune altre cose al medesimo soggetto appartenenti, e di minor rilievo di quelle altre: e noi ci lusinghiamo, che questi lavori sien per esser gradevoli a' Dotti, ed utili a' Giovanetti, se pur l'Opera risponda al suo disegno.

§.1. *Defin.* I. Un Fratto, di cui tanto il Numeratore, che il Denominatore sia una Funzione Razionale di una variabile, si dice esser *Genuino*, se tal variabile ascenda ad una maggior potenza nel Denominatore, che nel Numeratore. E se ciò non si avveri, ei suol dirsi *Spurio*.

§. 2. *Scol.* Vale a dire il fratto analitico $\frac{M}{N}$ dovrà dirsi *genuino*, se oltre all' esserne una funzione razionale della variabile x tanto il suo numeratore M, che il denominatore N, si avveri altresì, che l'indice della più alta potenza della x nel denominatore sia maggiore di quello della più alta potenza della medesima x nel numeratore, comunque ciò si conosca, cioè intuitivamente, o per illazione. Il perchè i seguenti fratti $\frac{A}{p+qx}$, $\frac{A+Bx}{xx-2ax+cc}$, $\frac{x^n+\alpha x^{n-1}+\ldots}{(a+x)^n(b+x)}$ son genuini, supponendosi esser quantità costanti le grandezze diverse dalla x, che vi si osservano. E sarebbe *spurio* quest' altro fratto $\frac{A+Bx+Cxx}{p+qx}$, o qualche altro similmente condizionato. Intanto

to per mezzo dell'analitica divisione potrà troncarsi da un fratto spurio, se ne sia d'uopo, la parte intera, per indi averne in ciò che resta il fratto *genuino*. Finalmente vuol avvertirsi, che se in un fratto genuino si trovi esser costante il numeratore, per esempio uguale ad A, ei potrà supporsi moltiplicato per x^0: e per tal ragione dovrà l'addotta definizione (*a*) convenirgli.

§.3. *Cor.I.* Se nel denominatore di un fratto genuino rinvengasi la prima potenza della variabile x, senza esservi altra di lei potenza di grado superiore al primo, il numeratore di esso dovrà esser costante. E la forma generale di tal fratto potrà indicarsi per $\frac{A}{p+qx}$.

§. 4. *Cor. II.* E se la variabile x nel denominatore di un fratto genuino ascenda alla seconda potenza, il di lui numeratore potrà avere una delle seguenti forme A, Bx, $A+Bx$, l'ultima delle quali è delle altre più generale.

§.5. *Cor.III.* E generalmente, se la variabile x ascenda alla potenza n nel denominatore di un fratto genuino, ella non vi si potrà elevare al di là della potenza $n-1$ nel numeratore.

§. 6. *Defin.II.* Due Funzioni della variabile x diconsi essere *tra se prime*, quando esse non abbiano per comune misura, che la sola unità, o qualche altra quantità costante.

§. 7. *Coroll.* E quindi, se la X dinoti una Funzione intera e razionale della variabile x, le due espressioni X, e $(p+qx+rxx+\text{ec.})^n$ dovran dirsi tra se prime, se la X non contenga alcun fattore uguale a $p+qx+rxx+$ec., o ad un fattore di questo polinomio.

6 PROP.

(*a*) Il P. Vincenzo Riccati valentissimo Analista Italiano nelle sue *Inst. di Calc. Int. Cap.* 8. §. 21. così definisce le frazioni pure, o genuine. *Fractiones puræ illæ dicuntur, in quibus exponens numeratoris minor est exponente denominatoris*. Ma cotesta definizione non sembra esser completa (1).

§. 8. *Se* $\frac{M}{N}$ *dinoti una qualunque Frazione Genuina; ed* X *e* Ψ *ne sieno i fattori del suo denominatore, che però supponganzi essere tra se primi* (6)*; ella potrà scomporsi in due fratti benanche genuini, che abbiano per loro denominatori le grandezze* X, *e* Ψ *rispettivamente.*

Dim. Suppongasi la proposta frazione $\frac{M}{N}$ essere uguale a queste due altre $\frac{V}{X}$, e $\frac{\Phi}{\Psi}$, di cui i numeratorj V, e Φ vi si deggian determinare. E sia n l'indice della massima potenza della variabile x nella funzione X, ed r il massimo esponente della medesima x nell'altra funzione Ψ. Sarà $n+r$ il più grand' esponente dell' anzidetta variabile nel denominatore della proposta frazione, cioè nella N, o nella sua uguale XΨ. E quindi il polinomio $A + Bx + Cxx \ldots + Qx^{n-1}$ potrà generalmente disegnarne (5) la V: l'altro $A' + B'x + C'xx \ldots + Q'x^{r-1}$ ne potrà esprimer la Φ: e'l numeratore M della proposta frazione dovrà avere la seguente forma generale $a + bx + cxx \ldots + qx^{n+r-1}$. Ove vuolsi avvertire, che le a, b, c, A, B, C, A', B', C', ec. ne dinotano altrettante quantità costanti, con tal divario, che le sole a, b, c .... q son grandezze note, (di cui alcune possono essere anche zero), e le altre poi ne sono ignote da doversi da quelle rilevare.

Ciò posto si moltiplichi per XΨ l'assunta equazione $\frac{M}{N} = \frac{V}{X} + \frac{\Phi}{\Psi}$: avrassi $M = V\Psi + \Phi X$. E ponendo in questa seconda equazione i valori delle grandezze M, V, Φ indicati nel §. precedente, sarà $a + bx + cxx \ldots + qx^{n+r-1} = \Psi\,(A + Bx + Cxx \ldots + Qx^{n-1}) + X\,(A' + B'x + C'xx \ldots + Q'x^{r-1})$.

Ma

Ma la variabile x ascende alla potenza r nella funzione Ψ, come si è detto quì sopra: dunque ella dovrà montarne alla potenza $n+r-1$ nel primo di que' due polinomj, che osservansi nel secondo membro di quest'ultima equazione. E con simil ragionamento si concluderà esserne $n+r-1$ l'indice della più alta potenza della x nel secondo de' detti polinomj. Il perchè essendo $n+r-1$ il màssimo esponente della x nell'un membro e nell' altro dell' esibita equazione; ne sarà $n+r$ il numero delle classi de' termini analoghi, che vi si conterranno: cioè di quei termini, ove la x in ambe le di lei parti ritrovasi elevata alle potenze $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots n+r-1$. Quindi è che facendosi altrettante equazioni de' coefficienti di detti termini, potran determinarsi dalle date a, b, c ec. le assunte A, B, C, A', B', C', ec. E la proposta frazione $\frac{M}{N}$ potrà risolversi ne' due fratti *genuini* quassù indicati.

Intanto, se le grandezze X, e Ψ non sieno due fattori della N tra se primi, esse dovranno avere una qualche comune misura (6), che almen dee essere della forma lineare $\alpha+\beta x$. Or supponendo uguale al zero cotesto binomio, lo che può farsi, anche diverrà zero il secondo membro dell' Equazioue $M=V\Psi+\Phi X$, ove tal binomio n'è un fattore. E dovrà quindi restarne $M=0$. Ma ciò ripugna: dapoichè non si è supposto esserne $\alpha+\beta x$ un fattore della M, o (che torna allo stesso) ponendo in M in luogo della x quel suo valore $-\frac{\alpha}{\beta}$ non vedesi esser zero il risultato (a). Dunque le X, e Ψ deggion essere fattori della N tra se primi. C.B.D.

(a) Al porsi $\alpha+\beta x=0$, ogni funzione della x, ove quel binomio non siane un fattore, deesi acquistare un valor determinato. Lo che dalle Teorie delle Funzioni Analitiche l'è noto.

§. 9. *Coroll. I.* In simil guisa può dimostrarsi, che la Frazione Genuina $\frac{M}{X.X'.X''}$ sia risolvibile in tre altri fratti puranche genuini, e delle seguenti forme $\frac{V}{X}$, $\frac{V'}{X'}$, $\frac{V''}{X''}$, qualora sieno le X, X', X'' fattori tra se primi del denominatore della frazion proposta. E lo stesso dicasi se tali fattori sien più di tre.

§. 10. *Cor. 2.* E se il denominatore N della Frazione Genuina $\frac{M}{N}$ sia risolvibile in fattori semplici, che sien tutti ineguali, e che noi dinotiamo per $x-a$, $x-a'$, $x-a''$, ec., potrà scomporsi la detta Frazione in altrettanti fratti genuini delle seguenti forme.

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A'}{x-a'},\ \frac{A''}{x-a''},\ \text{ec.}\ (a)$$

§. 11. *Scol.* Questo Teorema doveasi dimostrar generalmente (*b*), e nel principio di coteste analitiche ricerche per poterne rassodare la possibilità delle cose, che saran più giù definite, ed essere come base a' Metodi ad esse convenienti. Onde non sappiam comprendere, perchè altri ciò non rilevi, o a danno vel trascuri de' Giovanetti. Intanto prima di esporre altre dicevoli risoluzioni di cotesti

(*a*) Quì le grandezze A, A', A'', ec. son constanti da doversi determinare col Metodo praticato nel Teorema, o con qualche altro confacevole. E la M è una conveniente funzione della x (5).

(*b*) Il sommo Eulero non dimostra questa verità primordiale generalmente, come per ragion di Scienza ei far dovea; ma da qualche esempio, su cui ragiona con eleganza, cerca di rassodarla. In fatti nel §. 40. dell'*Intr. all'Anal. degl'Inf.* così dice il Valentuomo: *cujus rei veritas ex exemplo clarius, quam per ratiocinium perspicietur.* Ma poi nè egli, nè altri impegnansi a dimostrar la necessità della condizione, che deggiono avere i fattori X, e Ψ del denominatore del dato fratto per ottenersi il richiesto risolvimento, cioè di doverne esser tra se primi.

testi Fratti, è ben di recarne qualche esempio per vie più chiarire un tal Teorema, e la condizione che vi s'include.

Esempio I.

§. 12. *La Data Frazione Genuina* $\frac{x^3}{1-x^4}$, *vuol risolversi in due altre frazioni benanche genuine, che abbiano per loro denominatori i Binomj* $1-xx$, *ed* $1+xx$ *fattori tra se primi del proposto denominatore.*

Soluz. Le richieste frazioni si suppongano avere le seguenti (4) idonee forme.

$$\frac{A+Bx}{1-xx}, \text{ e } \frac{C+Dx}{1+xx}$$

Ed esse poi ridotte allo stesso nome si uguaglino alla data. Dovrà esserne il numeratore di questa uguale alla somma de' numeratori di quelle. Cioè

$$x^3 = A + Bx + Ax^2 + Bx^3 + C + Dx - Cx^2 - Dx^3$$

Dunque pareggiando i coefficienti de' termini analoghi di quest' Equazione Identica, ch'è di tre dimensioni, ne avrem quattro Equazioni lineari, ed indeterminate, cioè le seguenti:

$$1 = B - D;\ A - C = 0,\ B + D = 0,\ A + C = 0$$

Or la seconda, e la quarta di esse ci fan conoscere dover esserne $A = 0$, e $C = 0$: (lo che rilevasi or sommandole insieme, ed or dall'una l'altra sottraendo). Ed essendo per la terza delle anzidette Equazioni la $B = -D$, la prima riducesi ad $1 = 2B$. Dunque sarà $B = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$, e le richieste frazioni saranno effettivamente

$$\frac{\frac{1}{2}x}{1-xx}, \text{ e } \frac{-\frac{1}{2}x}{1+xx}$$

Es. II.

Esempio II.

§. 13. *Propongasi il Fratto Genuino* $\frac{2x+1}{(xx-x)(xx-1)}$ *da doversi risolvere in due altri Fratti, che abbiano per loro denominatori i Binomj* $xx-x$, *ed* $xx-1$ *fattori del proposto denominatore, che non son tra se primi; divisarne l'assurdo, che s'incontrerebbe in tal caso* (a).

Soluz. Suppongansi essere le addimandate frazioni

$$\frac{A+Bx}{xx-x}, \text{ e } \frac{C+Dx}{xx-1}$$

E ridottele allo stesso nome del proposto fratto, si sommino i loro numeratori. Si avrà per una tal somma il seguente Polinomio $-A-(B+C)x+(A+C-D)xx+(B+D)x^3$. Or questo dovrebbe uguagliare $2x+1$ numeratore del proposto fratto. Sicchè formandone l'Equazioni de' termini analoghi, come si è quì sopra praticato, s' incontrerebbe $3=0$, lo ch' è un assurdo. Che anzi senza maneggiar cotest' Equazioni, ei sarebb' emerso col solo supporre uguale a zero $x-1$ comune misura di que' due denominatori $xx-x$, ed $xx-1$. Poichè in tal supposizione l'è uguale a zero il divisato Polinomio (di cui $x-1$ vedesi esserne un fattore): e quindi anche ne sarà tale $2x+1$, che dee pareggiarlo. Ma nell' essersi supposto $x-1=0$, n'è $x=1$. Dunque l'Equazione $2x+1=0$ ridurrassi a $2+1=0$. Ch' è un assurdo.

PROP.

(a) Ciò serve a chiarire la seconda parte della precedente dimostrazione.

PROP. II. TEOR.

§. 14. *Sieno* $(a+x)^n$ *ed* X *fattori tra se primi del denominatore* (7) *della Frazione Genuina* $\frac{M}{X(a-x)^n}$; *dico potersi questa risolvere nelle frazioni benanche genuine, e delle seguenti forme*

$$\frac{A}{(a-x)^n} + \frac{A'}{(a-x)^{n-1}} + \frac{A''}{(a-x)^{n-2}} \cdots\cdots + \frac{V}{X},$$

ove i numeratori A, A', A" ec. *son grandezze costanti da determinarvisi.*

Dim. In virtù del precedente Teorema il proposto fratto può scomporsi in due altri, l'uno che abbia X per denominatore, e per numeratore la V, ch'è un conveniente (5) Polinomio: e l'altro che debb'avervi $(a-x)^n$ per denominatore, e per numeratore (5) un Polinomio della seguente forma $\alpha+\beta x+\gamma xx \ldots\ldots + \varphi x^{n-1}$. Dunque per poter reggere la proposta risoluzion del fratto, dovrebb'esserne

$$\frac{A}{(a-x)^n} + \frac{A'}{(a-x)^{n-1}} + \frac{A''}{(a-x)^{n-2}} \cdots + \frac{P}{a-x} = \frac{\alpha+\beta x+\gamma xx \ldots\ldots + \varphi x^{n-1}}{(a-x)^n}$$

o che torna allo stesso, le assunte A, A', A", ec. dovrebbero essere *determinabili* dalle grandezze α, β, γ, ec. Ma moltiplicando cotesta Equazione per $(a-x)^n$, ottiensi

$$A + A'(a-x) + A''(a-x)^2 \ldots\ldots + P(a-x)^{n-1} = \alpha+\beta x+\gamma xx \ldots + \varphi x^{n-1}:$$

ed il primo membro di quest'altra Equazione n'è simmetrico al secondo. Dunque il pareggiamento de' termini analoghi di essa sarà sufficiente a determinarvi le assunte A, A', A", P, ec. dalle altre α, β, γ, ec. E quindi potrà esserne

$$\frac{M}{X(a-x)^n} = \frac{A}{(a-x)^n} + \frac{A'}{(a-x)^{n-1}} + \frac{A''}{(a-x)^{n-2}} \cdots\cdots + \frac{V}{X}$$

PROP.

PROP. III. TEOR.

§. 15. *Sieno* $(xx-2ax+cc)^n$, *ed* X *i fattori tra sè primi del denominatore della Frazione Genuina* $\frac{M}{X(xx-2ax+cc)^n}$; *io dico potersi questa risolvere ne' seguenti fratti anche genuini*

$$\frac{A+Bx}{(xx-2ax+cc)^n} + \frac{A'+B'x}{(xx-2ax+cc)^{n-1}} \ldots\ldots + \frac{V}{X},$$

ove le A, A', B, B', *ec. quì ne dinotino altrettante quantità costanti da doversi determinare.*

Dim. Quest' assunto può dimostrarsi, come quello del Teorema precedente: sebbene l'Equazion Identica, che ne determina le quantità assuntizie A, A', B, B', ec., qui ne monti al grado $2n-1$, là ove nel precedente era $n-1$.

§. 16. *Scol.* Il denominatore di un Fratto Genuino potendo aver fattori di diverse dimensioni, a quali di essi dovrem nostre ricerche limitare? A soli fattori semplici, o lineari, se pure il sien reali. E se tra quelli ve ne ha degl' immaginarj, dovrem prendere in luogo di essi certi fattori duplici reali (che sieno di seconda dimensione) e 'l più delle volte han la seguente forma trinomiale $xx-2ax+cc$, ove sia la c maggiore dell' a. Or tutto ciò si vuol fare per due ragioni. Prima, affinchè ciascun de' fratti emergenti dal risolverne quel dato Fratto non sia ulteriormente risolvibile in altri. Secondo, perchè una tal forma di fratti n'è assai comoda per le integrazioni, che talora vi si deggion fare: per l'indagine de' termini generali (*a*) delle Serie Ricorrenti: e forse per altre analitiche ricerche. Ed ecco l'impegno de' due seguenti Teoremi nel dover risolvere il Polinomio $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2}$ ec. ne' divisati fattori.

PROP

(*a*) Se un Fratto Genuino si svolga in una serie infinita, co' Metodi proposti nell'Analisi Sublime, cotesta serie suol dirsi *Ricorrente*; dapoichè per

PROP. IV. TEOR.

§. 17. *Volendo risolvere in Fattori-semplici il Polinomio $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} +$ ec., ove la x sia una grandezza variabile, convien porlo uguale a zero. E dinotandosi per a, b, c, ec. le radici di cotesta Equazione, cioè i valori della x ad essa soddisfacenti, dovranno essere $x-a$, $x-b$, $x-c$, ec. i Fattori del proposto Polinomio.*

Dim. Sieno a, b, c, ec. le radici dell' Equazion, che nasce dal porre il proposto Polinomio uguale a zero per vi determinare la x, come s'ella fosse ignota. Sarà chiaro doversi cotesta Equazione Algebrica trasformar nell' altra $(x-a)(x-b)(x-c) \ldots = 0$. E tra

per otteneme un qualunque suo termine convien ricorrere ad alcuni di quelli, che immediatamente il precedono: cioè il coefficiente di quel termine può formarsi con sommare insieme i coefficienti di questi dopo di averli moltiplicati per certe quantità date rispettivamente. E quindi risolvendo il proposto fratto in altri più semplici di esso, e svolgendo ancor questi in altrettante Serie ricorrenti; la somma de' termini generali di coteste Serie parziali dovrà uguagliare il termine generale della proposta Serie. Il sagacissimo Moivre fu il primo a specular la natura, e la genesi delle Serie Ricorrenti Semplici. Il sommo Eulero seppe illustrarne le speculazioni di questo Geometra Inglese. E l' incomparabile Sig. La Grange nel 1. *vol. Miscel. Taurin.* ne ridusse la ricerca de' termini generali all' integrazione dell' Equazioni lineari a differenze finite: ed altrove ei pur li rinvenne con un metodo ingegnoso, e senza mica risolverne la frazion generatrice nelle sue parziali. Inoltre le odierne cure de' Geometri Tedeschi son rivolte a calcolar immediatamente ciascun termine di una Serie Ricorrente. E finalmente l' insigne Sig. la Place ha fatto delle saviissime ricerche su i termini generali delle Serie *Recurro-recurrenti*, su di che anche si è occupato lodevolmente il Sig. La Grange nell'*Acc. di Berl.* 1775.

quel Polinomio, e 'l prodotto di questi binomj dovrà intercedervi un' Equazione Identica, che dee reggerne per qualunque valore, che alla variabile x potrem dare (*a*). Cioè a dire, è Identica la seguente Equazione

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{ec.} = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots \quad A$$

e 'l secondo membro di essa non è, che il primo trasformato ne' suoi fattori. Or sebbene (*b*) col supporne uguale a zero quel Polino-

(*a*) Col fupporfi il propofto Polinomio uguale a zero, la variabile x par che traligni di fua natura, divenendone coftante da variabile, che l'era. E quindi potrà dir taluno non effer retto il metodo prefcritto in quefta Propofizione, come quello, che la natura ne cangia del foggetto. Ma a dileguargliene tal dubbio fi è deftinata l'ultima parte della dimoftrazione del prefente Teorema.

(*b*) In grazia de' Giovani Studiofi convien aggiungerne alcune cofe nuove ful paffaggio di un' Equazione Algebrica in Identica, e di quefta in quella. Ed in I. luogo ponendo nell' Equazione A la grandezza $\frac{1}{v}$ in vece della x, ella fi cangerà in quest' altra

$$1 + Pv + Qvv + \text{ec.} = (1-av)(1-bv)(1-cv) \quad B$$

E poichè quest' Equazione Identica dee reggerne ponendo per la v una fua qualunque funzione, che noi potrem fupporla razionale, e dinotarla per V; farà pure $1+PV+QVV+\text{ec.} = (1-aV)(1-bV)(1-cV)$ ec. E cangiando in Algebrica una tal' Equazione con dispiegarne la V nel fuo valore in v, e con fignificarvi per A, B, C, ec. i coefficienti delle potenze afcendenti dalla v, fi avrà la feguente Equazione derivata

$$A + Bv + Cvv + \text{ec.} = 0,$$

le cui radici non fon più $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, ec., quali fcorgonfi nella B; ma quelle sì bene, che ricavanfi dalle feguenti Equazioni

$$1-aV=0,\ 1-bV=0,\ 1-cV=0,\ \text{ec.}$$

Ed ecco una genefi dell' Equazioni Algebriche ben diverfa da quella dell' Harriot Inglese, e che ne apre un ampio campo a nuove analitiche fpeculazioni. Del che altrove.

II. Vo-

linomio, i valori della x soddisfacenti a quest' Equazione Algebrica non sien che le $a, b, c,$ ec. solamente; pur non di meno son varia-

II. Volendo ridurre in fattori il Binomio esponenziale $\frac{1}{2}(e^x \pm e^{-x})$ non vi otterrem l'intento col porlo uguale a zero, come si è proposto nel presente Teorema. Ma riducendo coteste grandezze esponenziali nelle loro serie, e pareggiandone a zero il risultato, potrem ritrovare con una verità ovvia delle funzioni circolari i fattori di questo, che dovran esser benanche del proposto Binomio i fattori. Ed un tal metodo è più naturale, e più semplice di quello dell' Eulero, che in tal ricerca si vale d' infinitesimi di primo, e di secondo ordine, e di quell' altro benanche di Simone l' Huillier, il quale col metodo de' limiti, e con certe ingegnose evoluzioni di funzioni circolari ciò s' impegna di ottenere.

III. Inoltre prendendo i log-mi del primo, e del secondo membro dell' Equazione B avrassi

$$l(1+Pv+Qvv+\text{ec.}) = l(1-av) + l(1-bv) + l(1-cv) + \text{ec.}$$

E se risolveremo coteste grandezze logaritmiche nelle loro serie, e vi pareggeremo i termini analoghi, potrem rinvenirne agevolmente le somme de' quadrati, de' cubi, delle quarte potenze, ec. delle radici dell' Equazione

$$1 + Pv + Qvv + \text{ec.} = 0.$$

Questo metodo si dee al Sig. Landen Inglese. E l' accurato Sig. Lacroix un altro più agevol ne propone, che consiste nel prendere i logaritmi di amendue i membri dell' Equazione A, nel differenziarli, nel risolvere in serie i fratti del secondo membro di essa, e nel paragonarne i termini analoghi, dopo di avervi praticate le ovvie riduzioni.

IV. Finalmente il cangiamento di un' Equazione da Algebrica in Identica, e da questa in quella non confondendovi le lor nature, non potrà attribuirsi ad un' Equazione in un di que' due stati ciò, che le converrebbe nell' altro esclusivamente. Così il differenziale log-mico dell' Equazione A può moltiplicarsi per lo denominatore del I. membro, ch' è il Polinomio $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{ec.}$; ma questo non potrà poi supporsi uguale a zero. Conciossiachè in tal modo avrebbesi un erroneo abbassamento di tal Equazione, o qualche altra cosa evidentemente assurda. Ed in ciò sian cauti gli Apprenditori di queste Scienze.

variabili le differenze delle a, b, c, ec. dalla x presa indeterminatamente, e nello stato di sua *variabilità*. Onde dee esser anche variabile il prodotto di queste differenze, il quale è la trasformata del Polinomio proposto, e con questo ne forma quell' Identica Equazione (a).

§. 18. *Coroll.* Concessa la Risoluzione dell' Equazioni Algebriche, un qualunque Polinomio può sempre disciorsi ne' suoi Fattori lineari, che saranno reali, o immaginarj, o gli uni cogli altri tramischiati. Del che quì appresso.

§. 19. *Scol.* Se mai quel termine del dato Polinomio, ove la x ascende alla massima potenza, non abbia per suo coefficiente $+1$, qual si è supposto quì sopra, ma sì bene $\pm\alpha$; tra' fattori di esso Polinomio, che ritraggonsi in supponendolo uguale a zero, convien riporvi quel $\pm\alpha$. Così i fattori del binomio $2xx-2$, come ben li comprendiamo, sono $x+1$, $x-1$, e 2. I due primi di essi rilevansi dal supporvi il detto binomio $2xx-2=0:0$, riducendo tal Equazione, dal porvi $xx-1=0$. E l'altro fattore 2, che avealo una tal riduzione eliminato, si è dovuto ripor tra quelli per renderveli completi. Ma se cotesto Polinomio sia denominatore di una frazione; quel $\pm\alpha$ potrà escludersi da' fattori di esso ricavatisi dal supporlo uguale a zero, sol che divideremo per $\pm\alpha$ il di lei numeratore. E quindi la general forma di un di questi fattori semplici, ed inuguali, in che può risolversi il denominatore di un fratto genuino, sarà $x-a$: la ove $(x-a)^r$ sarà quella del prodotto di più fattori semplici, ed uguali. E la prima di tali forme potrà cangiarsi in $a-x$, e l'altra in $(a-x)^r$ per le cose già dette.

PROP.

(a) Il Dottor Valmesley suol dire su tal soggetto *les racines d' une Equation en sont toujours des diviseurs*. Ma i PP. le Seur, e Jacquier vi prendon que' fattori per radici. E sì l'uno, che l'altro di questi due concetti non sono adeguati. Onde badino i giovanetti di evitarli.

PROP. V. TEOR.

§. 20. *Se il Polinomio* $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} +$ *ec. abbia Fattori lineari immaginarj, il numero di questi è sempre pari: e ciascuno di essi ne ha sempre un altro affine, sicchè il prodotto loro divien reale. Un tal prodotto suol emergervi sotto la forma trinomiale* $xx - 2ax + cc$; *ove la* c *sia maggiore dell'* a. *Ed ei potrebbesi benanche esibire sotto la forma Euleriana* $xx - 2cx.\cos.\varphi + cc$.

Dim. La prima parte di questa Proposizione è assai nota dalle Algebriche Teorie, o per quelle dell'Analisi Sublime. Sicchè omettendone la dimostrazione, è ben, che ne illustriamo la seconda parte. Su di che vuol sapersi, ch'essendo c maggiore di a, dee essere il fratto $\frac{a}{c}$ minore dell' unità: ond' ei potrà disegnarne il coseno di un angolo φ, postovi il raggio trigonometrico uguale all' unità. E quindi quel trinomio comune potrà ridursi alla forma Euleriana col seguente artifizio intuitivo, (a)

$$xx - 2ax + cc = xx - 2cx.\frac{a}{c} + cc = xx - 2cx.\cos.\varphi + cc.$$

§. 21. *Coroll. I.* Ponendo uguale a zero $xx - 2cx.\cos.\varphi + cc$, dee risultarne

$$x = c\ (\cos.\varphi \pm \text{sen}.\varphi\sqrt{-1}) \qquad \text{F}$$

§. 22.

(a) Vale a dire un Fattore duplice reale risultante da due semplici immaginarj può avere una di queste tre forme:

I. $xx - 2ax + cc$, II. $xx - 2cx.\cos.\varphi + cc$, III. $xx - 2ax + aa + bb$.

La prima vien usata da' Geometri Inglesi, la seconda da' Tedeschi, e la terza par che si adoperi da' Francesi. Su di che vedi le Seur, Jacquier, la Croix, ec. Ma intanto cotesta riduzione, e le altre de' seguenti Corollarj qui son condotte per vie più semplici, e più chiare di quelle, che altri per tal oggetto han calcate. Come taluno può accertarsene riscontrandoli.

§. 22. *Cor. II.* E se vorremo elevare alla potenza n i due membri dell' Equazione F, sarà

$$x^n = c^n(\cos.\varphi \pm \text{sen.}\varphi\sqrt{-1})^n = c^n(\cos.n\varphi \pm \text{sen.}n\varphi\sqrt{-1}) \quad G$$

Imperocchè formando la potenza n del binomio $\cos.\varphi \pm \text{sen.}\varphi\sqrt{-1}$ si vedranno i termini reali di questa serie pareggiarne $\cos.n\varphi$, e que', che son moltiplicati per $\sqrt{-1}$, esserne uguali a $\text{sen.}n\varphi$. Lo che è noto abbastanza (*b*).

§. 23. *Cor. III.* Pe' metodi volgari si elimini $\sqrt{-1}$ dall' Equazioni F, e G, si troverà immantinente

$$x^n = c^n.\cos.n\varphi \pm c^n.\text{sen.}n\varphi\left(\frac{x - c.\cos.\varphi}{\pm c.\text{sen.}\varphi}\right) \quad H$$

E questo altro valore della x^n vedesi sgombro di grandezze immaginarie.

PROP.

(*b*) Elevando il binomio $\cos.\varphi + \text{sen.}\varphi$ alla potenza n, i termini impari della Serie, che n' emerge, presi con segni alternativi da + in —, daranno l'espressione del $\cos.n\varphi$: e quella del $\text{sen.}n\varphi$ sarà formata da' termini pari, che pur si alternino da positivi in negativi. Questa regola potrebbesi raccorre per induzione da ciò, che han detto il Signor Lagni nell'*Acc. delle Scien. an.* 1705, e 'l Marchese de l' Hopital *Trait. analyt. Sect. Coniq. pag.* 435. Ma l'Autore di quest' Opuscolo ha dimostrato in due diverse guise, che ci sembran nuove, la verità recata. Cioè a dire, ei la trae immediatamente dal Teorema volgarmente detto di Tolommeo: ed altrove ei la ricava da questa verità di Analisi sublime, che dee esser $\pm\varphi\sqrt{-1} = l.(\cos.\varphi \pm \text{sen.}\varphi\sqrt{-1})$. Intanto il medesimo Autore ha stabilita questa verità, come un Teorema fondamentale delle funzioni circolari, dimostrandola col Metodo de' Limiti, che tanto a'Geometri Moderni è gradevole.

PROP. VI. TEOR.

§. 24. *Il Polinomio* $A+Bx+Cxx+Dx^3+$ *ec. acquista la forma lineare* $\alpha+\beta x$, *qualor si ponga uguale a zero il trinomio* $xx-2ax+cc$, *che non sia fattore di detto Polinomio: o, ch' è lo stesso, se ne' suoi termini porremo* $2ax-cc$ *per* xx.

Dim. Supponendo il trinomio $xx-2ax+cc=0$, sarà $xx=2ax-cc$; e quindi x^3, che per quest' ultima Equazione dee uguagliare $2axx-ccx$, sarà con quel riducimento uguale a $4aax-2acc-ccx$. Dunque il quadrinomio $A+Bx+Cxx+Dx^3$ diverrà

$$A+Bx+2aCx-ccC+4aaDx-2accD-ccDx.$$

E ponendo uguale ad α tutti i termini costanti di quest'espressione, ed a β la somma de' coefficienti della x, ella ridurrassi al binomio lineare $\alpha+\beta x$. E lo stesso ragionamento converrà continuare, se in quel Polinomio vi sieno altri termini, ove la x ne monti ad una potenza superiore alla terza.

§. 25. *Scol.* Questo Teorema ci offre un semplicissimo Principio, che più giù impiegheremo a risolvere agevolmente i più difficili Problemi di queste Teorie, e senza punto intrudervi, come altri suol fare, grandezze immaginarie, Funzioni Circolari, e termini affetti di duplice segno. Infatti supponendo uguale a zero il proposto trinomio $xx-2ax+cc$ (nel quale pongasi $cc=aa+bb$ per brevità di calcolo), si troverà immantinenti la $x=a\pm b\sqrt{-1}$, e quindi la $x^n=(a\pm b\sqrt{-1})^n$. Ma chi non vede esserne $n+1$ il numero de' termini, in che una tal potenza si dispieghi, e ad alcuni di essi doversi benanche il gemino segno $\pm$ apporre? E se ridurremo il detto trinomio nella forma (20) Euleriana $xx-2cx.\cos.\varphi+cc$, sarà $x=c.\cos.\varphi\pm c.\text{sen}.\varphi\sqrt{-1}$: e quindi $x^n=c^n(\cos.n\varphi\pm\text{sen}.n\varphi\sqrt{-1})$: cioè a dire n'emerge di forma binomia una tal poten-

za,

za, come altrove (22) il dicemmo. Ma nel riducimento del calcolo dovendosi prendere il cos. di $n\varphi$, e 'l seno di $n\varphi$ ritornerà la serie precedente con $n+1$ di termini, e collo gemino segno in alcuni (22). Intanto per mezzo del presente Teorema il valore della x^n vedesi costare del num. n di termini: niuno di essi n'è ingombro di grandezze immaginarie, e di funzioni circolari: e nemmen tra loro avvene alcuno, che sia affetto di quel duplice segno. E finalmente la detta forma lineare, e reale, in che si converte il proposto Polinomio $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ ec., ne agevola le risoluzioni degli anzidetti Problemi, come nelle *Reg. III.* e *IV.* dell'Opuscolo seguente, e dagli esempli, che loro adatteremo, ciò s'intenderà chiaramente.



OPU-

OPUSCOLO V.

Continuazione dello stesso Argomento.

§.26. *Defin.III.* Le *Frazioni Parziali di un Fratto Genuino* si dicono quelle, che prese insieme il pareggiano, ed i cui denominatori son fattori del denominatore di quel Fratto.

Così i fattori semplici del Binomio $x^3 - x$, ch'è il denominatore del fratto genuino $\frac{2x+1}{x^3-x}$, son le grandezze x, $x-1$, $x+1$. Dunque le tre frazioni

$$\frac{-1}{x}, \quad \frac{\frac{3}{2}}{x-1}, \quad \frac{-\frac{1}{2}}{x+1},$$

che hanno per denominatori i detti fattori, e che sommate ugualglian quel fratto, saran le sue *parziali*, e le più semplici, ch'ei può averne (*a*).

(*a*) Negli Elementi di Analisi sublime manca una sì necessaria Definizione. Ed è anche malagevole il congegnarla adeguatamente, dovendo ella contenere non pur le antiche, ma le nuove risoluzioni di un fratto genuino (8, 14, 15). Or noi quì le indichiamo con quella clausola indefinita, che abbiam rinchiusa nella Def. *son fattori*, e non già *i fattori*. E poi per intender la natura del Problema, che vi si contiene, converrà por mente a ciò che segue. Se dianzi a sommare più frazioni numeriche, o analitiche, dopo di averle ridotte allo stesso nome; una tal ricerca è un Problema elementare dell'Aritmetica volgare o dell'Algebra. Ma il risolvere un di cotesti fratti nelle sue parziali, l'è poi il Problema inverso del primo: egli è pure indeterminato: e n'è più malagevole del diretto. Noi quì lo risolviamo per le grandezze analitiche e colle convenienti determinazioni. E'l Sig. Gauss lo ha risoluto riguardo a'numeri.

§. 27. *Scol.* Cotesta Definizione non pur contiene la genesi del definito, come l'è proprio di quelle, che i Geometri dicon *reali*; ma insiem ne prefigge le operazioni, che avrebbersi ad istituire su di un fratto genuino per poterlo nelle sue parziali disgregare. Or le dette operazioni a due principalmente si riducono: *alla ricerca de' fattori del denominatore di tal fratto*: ed *all'assegnazion de' numeratori di essi*. E la prima di queste indagini, come si è dimostrato (17) quì sopra, eseguesi agevolmente, concessa la risoluzione delle Algebriche Equazioni: e per l'altra ne basta il maneggio delle Identiche. Or sebbene nell'idea del definito tralucan coteste operazioni; pur non è strano il girne altrove a rintracciarle. Conciossiachè il sommo Eulero, per quel che ne pare, ha recato alle dette indagini un nuovo aspetto: riducendole tutte ad un sol Problema generale, ed esimendone ciascuna di esse dal metodo dell'Eliminazioni, che suol esser penoso, e talora l'è anche impraticabile (*b*). *Data una Frazione Genuina* (eccone un tal Problema), *e dato un Fattore del suo Denomina-*

(*b*) Il numero dell'Equazioni lineari, che convien impiegarne a rinvenir coll'ovvio Metodo dell'Eliminazioni i valori di cotefte quantità affunte, è quanto il maffimo efponente della variabile x nel denominatore del dato fratto. *Vedi Dim. Prop. I.* Onde tal Metodo deę effer molefto, fe il detto efponente fia un numero alquanto grande: e farà quello impraticabile, fe quefto fia indeterminato. Il Dott. Varmesley nell'*Analyse des Mesures*, che meritò i plaufi degli Illuftri Geometri Clairaut e d'Alembert, col folo Metodo dell' Eliminazioni fi proccura il rifolvimento de' Fratti nelle di loro parziali. Ma egli fi limita ad efempli faciliffimi, e di determinati efponenti, forfe per infcanfarne gl' inviluppi de' calcoli negli altri. Il P. Riccati talor vi combina il Metodo Euleriano con quello dell' Eliminazioni, e ci fembra d'averne duplicata la difficoltà del lavoro. In fatti l'efempio da lui recato nel §. 32. *Cap. VIII. Calc. Integ.* vien efeguito con un calcolo immenfo, là ove per la noftra Regola II. ci farebbefi agevolmente guidato a fine.

minatore, determinare il numeratore di quella Frazione Parziale, che avrebbe tal Fattore per suo Denominatore. Intanto cotesto Fattore, per quel che si è detto (16) quì sopra, dee supporsi *semplice*, o *duplice reale*, e sì l'uno, che l'altro può esserne a qualunque potenza elevato. Dunque quattro casi può avere un tal Problema, o in quattro Problemi subalterni ei può distinguersi, i soggetti de' quali saranno dalle sottoposte Frazioni esibiti, cioè dalle

$$\frac{M}{X(x-a)},\ \frac{M}{X(x-a)^n},\ \frac{M}{X(xx-2ax+cc)},\ \frac{M}{X(xx-2ax+cc)^n}$$

Or ciascuno di questi Fratti dee esser Genuino: la M ne disegna generalmente il convenevol numeratore: la X n'è il Fattore socio di quell'altro del denominatore, che supponesi dato. Questi due fattori deggion esser tra se primi (8). E quella frazione, che tien la X per denominatore, si dirà *complemento delle parziali*, o *frazione del complemento*. Le quali cose abbiam voluto quì marcare per non istarne poi a ripeterle assai volte. Ed abbiamo pure stimato convenevole il convertire gli anzidetti Problemi in Teoremi, esponendoli colla divisa di Regole Didascaliche, perchè elleno in tal guisa si potessero comodamente apprender da'Giovani, e ritenere (c).

RE-

(c) Il fommo Eulero erafi determinato a voler efprimer quefti Problemi in Regole Teorematiche: dappoichè nel *Cap. II. Introd. in Anal. Inf.* vi enuncia in forma d'ipotefi il dato fattore nel denominatore di una frazione genuina, ed avrebbevi dovuto recar per tefi la determinazion del numeratore conveniente ad un tal fattore. Ma egli la rimette alle ricerche, che fi propone a fare: cioè *Si functionis fractæ* $\frac{M}{N}$ *denominator* N *factorem habeat* $(p-qz)^n$, *fractiones partiales hinc ortæ fequenti modo invenientur.* Ma il Valentuomo nel *Cap. XII.* di detta Introd., ch'è di un affine argomento, omette quefta forma di temi, checchè ne fia di ciò cagione: e ci ha quindi impegnati a feguir su tale argomento le fue primiere intenzioni, e la didafcalica accuratezza.

REGOLA I.

§.28. *Supponendo la data Frazione* $\frac{M}{X(x-a)}$ *uguagliarne le sue parziali* $\frac{A}{x-a}$, *ed* $\frac{V}{X}$; *il numeratore A della prima di coteste parziali sarà uguale a ciò, che ne diventa il fratto* $\frac{M}{X}$ *al porvisi a per x. Lo che rilevasi dal risolver l'Equazione* $M-AX=0$, *e l'altra* $x-a=0$.

E chiamando a cotesto valor determinato dell'assunta A, l'espressione $M-aX$ *divisa per l'altra* $x-a$ *darà sempre per quoziente una funzione intera della x, il quale sarà il valore della V numeratore della Frazion del Complemento.*

Dim. Part. I. L'Equazione, che abbiam proposta tra la frazione data, e le di lei parziali, si moltiplichi per $X(x-a)$ denominatore della data frazione: e'l primo termine del secondo membro di cotesta assunta Equazione si trasporti nel primo. Avrassi

$$M-AX=V(x-a). \qquad H$$

E poichè questa Equazione Identica dee reggerne per qualunque valore della variabile x, (*d*) noi potrem supporre la x uguale ad a; o, ch'è lo stesso, vi potrem porre il binomio $x-a=0$. In tal supposizione divien zero il secondo membro dell'Equazione H; come

(*d*) Un'Equazione Identica dee reggere per qualunque valore, che vorrem dare alla variabile x. Dunque il ſupporre la x uguale alla coſtante a è una conſeguenza immediata di queſta verità intuitiva, o come un Aſſioma, e da doverſi anteporre a qualunque principio ſpeculativo, che altri vi adotti a tal oggetto. Gli Analiſti nel determinare le debite Coſtanti, che ne rendan completi gl'Integrali, ſi valgon di coteſto naturaliſſimo Principio. Ed è bene il quì anche recarlo a queſt'uopo. *Ved. Scol. Reg. II.*

come intuitivamente il si conosce. Onde dee restarne il primo membro uguale a zero: cioè $M - AX = 0$, e quindi $A = M : X$. Ma la medesima supposizione della $x - a = 0$ c' induce a dover porre a per x nelle due M, ed X. Dunque il numeratore A della prima delle due proposte parziali sarà uguale a ciò, che ne diventa il fratto $\frac{M}{X}$, qualor vi si ponga a per x.

Part. II. Intanto si esprima per α cotesto valor determinato dell'assunta A: e ponendo quella grandezza in luogo di questa nell' Equazione H, si dividano amendue i di lei membri per $x - a$; sarà

$$\frac{M - \alpha X}{x - a} = V. \qquad K.$$

Ma il secondo membro dell' Equazione K è una funzione intera (8) della variabile x. Dunque tale ne dovrà esser benanche il primo. E quindi dividendo effettivamente l' espressione $M - \alpha X$ per l' altra $x - a$, un tal quoto, che si è detto dover essere una funzione intera della x, ne dinoterà la V, assunto numeratore del Complemento della prima parziale.

§. 29. *Coroll. I.* Si dinotino per $x - a'$, $x - a''$, ec. i fattori lineari della X: e supponendoli reali, ed inuguali fra loro ed al primo $x - a$, si potran con questa Regola determinare i numeratori delle sottoposte frazioni

$$\frac{A}{x - a} + \frac{A'}{x - a'} + \frac{A''}{x - a''} + \text{ec.};$$

che son le parziali della data frazione, e le più semplici, in che questa può risolversi.

§. 30. *Coroll. II.* Nel *Coroll. II.* del *Teor. I.* si è detto, che per potersi determinare coteste grandezze assunte A, A', A'', ec., conveniva usare l'ovvio Metodo dell' Eliminazione. Ma ora senza punto dipender da esso, potrem rinvenirle con una semplicissima Regola, ch'è la seguente. *Il numeratore di ciascuna di coteste parziali uguaglia il numeratore della proposta frazione diviso per lo prodotto de' denominatori delle rimanenti parziali, determinandovi la variabile x con supporre uguale a zero il denominatore della detta parziale.* Cioè per la prima di esse deesi porre a per x, per la seconda a' per x, per la terza a'' per x, ec. (*e*).

§. 31. *Scol.* Se per avventura nella X denominatore della frazion del complemento x si annidi qualche fattore uguale al binomio $x-a$; al farvisi $x-a=0$, la M dovrassi acquistare un valor determinato, che noi segneremo per ϵ, e la X ne diverrà zero. Dunque in tal caso quel numeratore A, che si è dimostrato uguale a ciò, che ne diventa il fratto $\frac{M}{X}$ al porvisi a per x, dovrà essere $\frac{\epsilon}{o}$ cioè un infinito, lo ch'è un assurdo. Ma cotesto assurdo, che gli Analisti credono un difetto nella presente Regola, e da torvisi con quella che or segue, vuol anzi attribuirsi all' impossibilità di un tal risol-

(*e*) In questo Corollario contiensi quel celebre Teorema analitico, che l'eruditissimo Leibnitz propose su tal ricerca negli Atti di Lipsia an. 1702. Egli ne soppresse la dimostrazione. Il Sig. Montucla crede che l'Autore l'avesse ordita col metodo de' coefficienti indeterminati tanto familiare a sì gran Geometra. E poi n' esprime tal verità nel seguente modo, che non ci sembra assai distinto: „ Ciascuna parte nota del denominatore è sempre „ il prodotto delle differenze, di cui la radice del fattore, ch' entra in „ questo denominatore, è sorpassata dalle radici degli altri, e 'l numeratore è lo stesso.

risolvimento per non esser tra se primi (8) i due fattori $x-a$, ed X in siffatta supposizione. Inoltre se tra' frattori del denominatore del proposto fratto vi sien degl' immaginarj inuguali tra loro, la presente Regola non ci condurrà ad assurdo; ma vi darà sotto immaginarie forme le parziali, che dovran poi ridursi in forme reali. E per tal riducimento, che riesce malagevole a' Giovani, converrebbe del Teorema del d'Alembert far uso, eseguitane. l' integrazione di tal fratto. Ma noi per evitar il primo di questi due sconci ci atterremo alla Regola seguente, ed alla III. per garantirci dall' altro.

Regola II.

§.32. *Supponendo la data Frazione* $\frac{M}{X(x-a)^n}$ *pareggiarne queste sue parziali* $\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A'}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A''}{(x-a)^{n-2}} \cdots\cdots + \frac{V}{X}$; *il numeratore A della prima di coteste parziali sarà uguale a ciò, che ne diviene il fratto* $\frac{M}{X}$ *al porvisi a per x* (Reg. prec.).

Ed indicando per α *un tal valore, e* (28) *per M' l'esatto quoziente di* $M-\alpha X$ *per* $x-a$; *il valore dell'A' numeratore della seconda parziale sarà uguale a ciò, che ne diventa il fratto* $\frac{M'}{X}$ *al porvisi a per x.*

E ciò deesi continuar nello stesso modo per gli altri numeratori; Onde l' ultimo de' divisati quozienti, cioè quello, che si prende la n^{esima} *volta, sarà il valore della V numeratore della Frazion del complemento.*

Dim. Part. I. L' assunta Equazione si moltiplichi per $X(x-a)^n$ denominatore del proposto fratto, e 'l primo termine del secondo mem-

membro di essa vi si trasporti nel primo (*f*). Avrassi

$$M-AX=A'X(x-a)+A''X(x-a)^2\ldots\ldots+V(x-a)^n \qquad L$$

Ciò posto, poichè l'Equazione L dee reggerne per qualunque valore, che vorrà darsi alla variabile x, noi potrem supporla uguale ad a, o vi potrem porre il binomio $x-a=0$. In tal supposizione divien zero il secondo membro dell'Equazione L. Dunque dovrà risultarne il primo uguale a zero. Cioè sarà $M-AX=0$, ed $A=M:X$. Ed esprimendo (28) per α cotesto quoto di M per X, ove pongasi a per x, sarà $A=\alpha$.

Intanto l'Equazione L dividasi per $x-a$ dopo essersi posta α per A, dovrà emergerne

$$\frac{M-\alpha X}{x-a}=A'X+A''X(x-a)\ldots\ldots+V(x-a)^{n-1} \qquad P$$

Ed essendo il secondo membro dell'Equazione P una funzione intera della x, tale dovrà esserne benanche il primo, che sotto mentita

(*f*) La dimostrazione, che il sommo Eulero ci porge in tal ricerca, è ingegnosissima; ma non pertanto l'è scabra a' giovani, come farem ciò rilevare dopo di aver quella distintamente quaggiù esibita. Cioè I. nell'Equazione proposta in questa Regola II. si determini la V colle ovvie analitiche operazioni. Avrassi

$$V=\frac{M-AX-A'(x-a)X-A''(x-a)^2X-\text{ec.}}{(x-a)^n} \qquad H$$

Ma II. la grandezza V l'è una funzione intera (8) della x. Dunque III. tale dovrà esserne il suo valore, che qui vedesi mentirne una frazionaria forma. E perciò IV. il numeratore di tal fratto sarà esattamente divisibile per $(x-a)^n$ suo denominatore: o pure potrà quello dividersi per $x-a$ un numero n di volte seguitamente. Per lo che V. il detto binomio $x-a$ sarà un fattore di quel numeratore. E VI. questo dovrà svanirne al supporsi quel binomio uguale a zero, cioè nel porsi $x-a=0$, o pure $x=a$. Ma VII. in cotesta supposizione veggionsi sparire in tal numeratore le grandezze moltiplicate per $x-a$. Dunque VIII. l'altra di lui

tità frazionaria forma ci si offre. E quindi il suo numeratore $M-\alpha X$ sarà esattamente divisibile per lo denominatore $x-a$. Con che chiamando M' siffatto quoziente, e surrogatolo nell'Equazione P in luogo della $(M-\alpha X):(x-a)$, si trasporti nel primo membro di essa il primo termine, che vedesi nel secondo; avrassi quest'altra Equazione

$$M'-A'X=A''X(x-a)\ldots.+V(x-a)^{n-1}, \qquad Q$$

la quale è identiforme all'Equazione L: onde colle medesime ra-

lui parte M—AX, ch'è esente da tal moltiplicazione, dovrà risultarne uguale a zero. Ma IX dall'Equazione $M-AX=0$ ritraesi $A=M:X$, e questo fratto divien costante al porvisi a per x. Dunque, se il dinoteremo (X) per α, sarà $A=\alpha$, ed $M-AX=M-\alpha X$. E XI sarà pure $M-\alpha X$ divisibile per $x-a$. Cioè a dire XII l'espressione $M-\alpha X$ può avere la seguente forma $M'(x-a)$. Intanto XIII nel valore della V esibito per l'Equazione H pongasi $M'(x-a)$ per $M-\alpha X$, e poi si divida per $x-a$ tanto il numeratore, che il denominatore di tal fratto, avrassi

$$V=\frac{M'-A'X-A''(x-a)X-\text{ec.}}{(x-a)^{n-1}}. \qquad K$$

Cioè a dire n'emergerà in K un'espressione della V più semplice di quella, ch'è in H. Inoltre XIV maneggiando il numeratore di questa seconda espressione, come si è fatto di quello di quell'altra, si conchiuderà similmente esserne A' uguale a ciò, che ne diviene il fratto $M':X$ al porvisi a per x.

Intanto quel passaggio dimostrativo, che abbiam segnato col VIII, è un pò duro a' giovani. Imperciocchè l'Eulero nel §. 44. *Introd. all' Anal. degl' Inf.* dal supporne il numeratore della frazione H uguale a zero, e dal porvi benanche $x-a=0$ ne conchiude legittimamente *eritque adeo* $M-AX=0$: laddove il Sig. Lacroix da' medesimi principj una diversa conseguenza ne ritrae con dirne *ce numerateur se reduit dans ce cas a* M—AX. Riguardo al num. XI ei dovrebbesi per l'intelligenza de' giovani vie più dilucidare: conciossiacchè l'Eulero ne' §§. 43. e 44. di detta

gioni del §. prec. potrà concludersi dover esserne A' uguale a ciò, che ne diventa il fratto M':X al porvisi *a* per *x*. E lo stesso convenevolmente si dica per gli altri numeratori A'', A''', ec. delle proposte parziali. E si vedrà poi col ragionamento della *II.Part. Reg. prec.* dover essere l'ultimo de' quozienti quassù proposti, cioè quello che

Opera ne varia su di ciò il ragionamento con recarne a' giovani dubbiezza. E 'l Sig. Cousin, che più chiaramente degli altri ciò rileva, il riduce al seguente Principio: *che, se la supposizione della* x—a=o *ne rende* M—αX=o, *debba essere* M—αX *divisibile per* x—a. Ma chi non vede esser questa Proposizione conversa di quella, che contiensi nel num. V, e da doversi esattamente dimostrare? Or noi qui ne suppliamo in pochi versi tal dimostrazione, e nel caso, che l'espressioni M—αX, ed *x*—*a* sieno intere, e razionali, come il deggion essere a tal uopo. Cioè, s'è possibile l'espressione M—αX divisa per l'altra *x*—*a* dia per quoto una funzione intera della *x*, che segniámo per ψ, ed una frazionaria dinotata per R:(*x*—*a*), ove la R sia una quantità costante. Sarà quel dividendo uguale a questo quoto moltiplicato per lo divisore *x*—*a*; cioè M—αX =ψ(*x*—*a*)+R. Ma si è detto, che supponendo *x*—*a*=o, debba esserne M—αX=o; dunque in tal supposizione sarebbe R uguale a zero: cioè a dire un tal quoto dovrà essere una funzione intera rispetto alla *x*.

Finalmente le idee men chiare, che su tal dimostrazione ne concepirono i PP. le Seur, e Jacquier, i quali per altro furon buoni Analisti, ci potran convincere, ch'ella non sia per essere assai chiara a' giovanetti. Eccone le loro espressioni *Calc. Int. pag.* 187. *vol.* 1: *Si on considere ce numerateur comme une equation, dont* x *est l'inconnue, en faisant ce numerateur* =o, *et qu'on la divise par sa racine* x+a=o *le quotient sera* =o, *ou si l'on substitue zero au lieu de* x+a *dans tous les termes ou* x+a *se trouve, il ne restera que* M—AX *qui doit etre aussi divisible par* x+a, *et le quotient doit etre zero* (quì la x+a corrisponde al nostro binomio x—a). Quindi è, che convenevolmente abbiam quì proposte due dimostrazioni nuove, e di facile comprensione, e colla seconda potrebbesi l'Euleriana agevolare.

che siasi preso dopo n di volte, uguale ad V numeratore della frazione del complemento $\frac{V}{X}$.

§. 33. *Aliter*.

Si moltiplichi per $X(x-a)^{n-1}$ l'Equazione assunta in questa Regola, e 'l primo termine del secondo membro vi si trasporti nel primo. Sarà

$$\frac{M-AX}{x-a} = A'X + A''(x-a)X \ldots. + V(x-a)^{n-1} \qquad R$$

E poichè il secondo membro di quest'altra Equazione è una Funzione intera della x, tale ne dovrà esser benanche il primo. E quindi la M—AX, che per tal ragione dee esser divisibile per $x-a$, l'è forza, che contenga un fattore uguale ad $x-a$. Sicchè ponendo $x-a=0$, ne sarà poi $M-AX=0$, e quindi $A=M:X$, cioè $A=\alpha$, esprimendovi per α ciò, che ne diventa il fratto M : X al porvisi a per x. Ciò premesso, si divida effettivamente $M-\alpha X$ per $x-a$, e si dinoti per M' un tal quoto, che dee essere un intero, qual n'è il II. membro della R; sarà, fatte le riduzioni,

$$\frac{M'-A'X}{x-a} = A''X \ldots. + V(x-a)^{n-2} \qquad S$$

Or cotest' Equazione S è di simil forma dell'altra R: dunque col medesimo ragionamento di quì sopra potrà rilevarsi A' uguale a ciò, che ne diventa il fratto M':X al porvisi a per x. E così per gli altri di cotesti numeratori si proceda.

§. 34. *Cor. I.* Se l'esponente n sia uguale a 2, il numeratore V della frazione del complemento sarà uguale al quoto esatto di M'—A'X per $x-a$, ove pongasi per A' ciò che ne diventa il fratto $\frac{M'}{X}$ al porvisi a per x. E lo stesso dicasi convenevolmente, se la n sia 3, 4, 5, ec.

§. 35.

§. 35. *Cor. II.* Essendosi determinato il numeratore V della frazione del complemento V : X , noi la potrem risolvere nelle sue parziali , se ne sia d'uopo , e con quella di queste quattro Regole , che ne parrà conveniente . E ciò intendasi benanche per le altre risoluzioni di cotesti fratti , che avremo in quest' Opera eseguite .

§. 36. *Coroll. III.* Se nel denominatore della data frazione contengasi il fattore $(a-x)^n$ in luogo dell' altro $(x-a)^n$, che quì si è supposto (*a*) ; col prescritto della medesima Regola potran rinvenirsi i numeratori delle parziali di questo fratto $M:X(a-x)^n$, che sono

$$\frac{A}{(a-x)^n}+\frac{A'}{(a-x)^{n-1}}+\frac{A''}{(a-x)^{n-2}}\;\ldots\ldots+\frac{V}{X}$$

§. 37. *Scol.* Il concetto più naturale, che ci offre un'Equazione Identica , l'è quello di potervi supporre la variabile *x* uguale ad una costante *a* , o , ch'è lo stesso , di potervi porre il binomio $x-a=0$. Noi lo abbiamo quì applicato a queste due Regole qual Principio di loro dimostrazione, preferendolo alle sagge speculazioni fatte dal sommo Eulero su tal soggetto , ed unanimamente dagli altri adottato. Cioè a dire (per poter quelle chiaramente quì abozzare) *se una Funzione intera di una variabile appaja sotto forma frazionaria, il numeratore di cotesta espressione dee esserne divisibile per lo denominatore , e questo convien che sia un implicito fattor di quello . Sicchè ponendo uguale a zero il detto denominatore , o un di lui fattore , l'è forza , che svanisca quel numeratore . E con queste Equazioni convenevolmente maneggiate potran determinarsi le grandezze*

(*a*) Il fommo Eulero nell' *Intr. all' Anal. degl' Inf.* efprime per $p-qz$ cotefto fattore femplice , e nel *Cap. ult. Calc. diff.* lo dinota per $f+gx$. Ma noi abbiam fimplificato sì l'uno, che l'altro binomio per quel che fi è detto nel §. 19.

te assunte, che vi si contengono. Ma cotesto Principio sembraci men chiaro, o men semplice del nostro. E nel tessuto di una didascalica dimostrazione, chi mai l'ignora! torna assai meglio l'apporvi un Principio intuitivo, che un altro speculativo, la cui luce, come nel nostro caso addiviene, col doversi a più soggetti in varie guise applicare, si dirada (*a*).

REGOLA III.

§. 38. *Volendo risolvere la data Frazione* $\frac{M}{X(xx-2ax+cc)}$ *in queste sue parziali* $\frac{A+Bx}{xx-2ax+cc}$, *ed* $\frac{V}{X}$, *convien ridurre in forma lineare l'Equazione* $M-AX-BXx=0$ *con porvi* (24) *mai sempre* $2ax-cc$ *per* xx, *cioè* $xx-2ax+cc=0$. *E pareggiando a zero i termini analoghi di detta Equazione si avranno i valori delle assunte* A, *e* B; *che li dinoteremo per* α, *e* β *comodamente*.

E sarà il numeratore V *della frazione del complemento quanto l'espressione* $M-\alpha X-\beta Xx$ *divisa per l'altra* $xx-2ax+cc$, *di cui il quoto dee esser sempre una Funzione intera della* x.

Dim. Part. I. L'Equazione, che abbiam proposta tra la frazione data, e le sue parziali, si moltiplichi per $X(xx-2ax+cc)$, e poi si trasportino nel primo membro di essa i due primi termini, che veggionsi nel secondo. Si avrà in tal modo

$$M-AX-BXx=V(xx-2ax+cc) \qquad H$$

Inoltre si supponga uguale a zero il trinomio $xx-2ax+cc$; ch'è un fattore del secondo membro dell'Equazione H; dovrà restarne il primo membro uguale a zero, al par del secondo, cioè

$$M-AX-BXx=0. \qquad K$$

Or

(*a*) Leggansi la nota (*f*) del §. 32., e le dimostrazioni dell'Eulero su tal soggetto.

Or dal supporne il trinomio $xx-2ax+cc=0$, ne risulta $xx=2ax-cc$: e col continuo (24) sostituirsi $2ax-cc$ per xx nell' espressione $M-AX-BXx$, questa trasformasi in un' altra lineare. Dunque uguagliando a zero i termini constanti dell' Equazione K ridotta a lineare, e que' puranche, che vi contengono la x, si avranno due Equazioni indeterminate, che son sufficienti a determinarvi le due grandezze assunte A, e B.

Part. II. Si esprimano per α, e β i valori delle A, e B, e ponendoli nell' Equazione H in luogo delle A, e B, si divida per $xx-2ax+cc$ la detta Equazione. Avrassi

$$\frac{M-\alpha X-\beta Xx}{xx-2ax+cc}=V.$$

Ma la grandezza V è una funzione intera della x: dunque tale dovrà esserne il quoto di $M-\alpha X-\beta Xx$ per $xx-2ax+cc$, che sarà il valore della V numeratore della frazione del complemento (*g*).

Regola IV.

§. 39. *Supponendo la data Frazione* $\frac{M}{X(xx-2ax+cc)^n}$ *doverne pareggiare queste sue parziali* $\frac{A+Bx}{(xx-2ax+cc)^n}+\frac{A'+B'x}{(xx-2ax+cc)^{n-1}}\ldots$ $\ldots+\frac{V}{X}$, *dovrà praticarsi la Regola precedente per vi determinare il numeratore della prima di siffatte parziali.*

Ed

(*g*) Nella X non deesi contenere alcun fattore uguale al primiero $xx-2ax+cc$, come vien saggiamente avvertito da' dotti Analisti Eulero, Lacroix, Cousin, ec., e per le ragioni recate nel §. 31. Ma se cotesto trinomio non sia duplice reale, dovrassi avvertire, che nella X non debba essèrvi nè anche un fattore del detto trinomio per effettuarsi l' indicata risoluzione del fratto.

Ed esprimendone per le α*, e* β *i valori delle* A*, e* B*, e per la* M' *l'esatto* (38) *quoziente dell'espressione* $M-\alpha X-\beta Xx$ *per lo trinomio* $xx-2ax+cc$*, dovrà ridursi in forma* (24) *lineare l'Equazione* $M'-A'X-B'Xx=0$*, e pareggiarne a zero i termini analoghi di essa per determinarvi le* A'*, e* B'*. E così più appresso.*

Dim. Colla guida della Regola II. e co' principj della III. può congegnarsi una chiara dimostrazione a quest' ultima Regola: ed ella può benanche in due modi, come fu praticato nella Regola II., eseguirsi (*h*).

§. 40. *Coroll. I.* Dinotando per α', e β' i valori delle A', e B', l'espressione $M'-\alpha'X-\beta'Xx$ sarà benanche divisibile per lo trinomio $xx-2ax+cc$: e 'l quoto, ch'è una funzione intera della x, potrà esprimersi per M''. E così procedasi più oltre per rinvenire delle altre parziali, se pur vi sieno, i numeratori.

§. 41. *Coroll. II.* E l'ultimo di siffatti quozienti, cioè quello che avrem preso il numero n di volte, sarà il numeratore della frazione del complemento.

§. 42. *Scol.* Queste due ultime Regole, che in chiaro, e ritenevol modo abbiam proccurato di quassù esporre, ci esentan dal maneggiar grandezze immaginarie, e funzioni circolari, e dal praticarvi altre malagevoli cose, che altri a tal uopo suol proporre. Il sommo Eulero le ha tutte in questo argomento (*a*) impegnate, volendo più alla generalità delle soluzioni attenersi, che all'agevolezza di ottenerle. Ond'ei per promuover questa in qualche modo, si è

(*h*) Questa dimostrazione coll'orditura Euleriana è assai più difficoltosa a' giovani di quella della II. Regola fatta in simil modo da non pochi Analisti. Ciò può arguirsi dalla nota (*f*) §. 32.

si è poi ingegnato di esibire i valori delle assunte A, e B co' seguenti fratti ($\mathrm{P}\mathrm{r}-\mathrm{p}\mathrm{R}$) : ($\mathrm{Q}\mathrm{r}-\mathrm{q}\mathrm{R}$), e ($\mathrm{P}\mathrm{q}-\mathrm{p}\mathrm{Q}$) : ($\mathrm{Q}\mathrm{r}-\mathrm{q}\mathrm{R}$), e ciò pe' casi della Regola III., avendone anteriormente dichiarati di coteste grandezze i valori. Ma saran poi facili a ritenersi cotesti fratti, o saran tali l'espressioni, che da queste grandezze vengono indicate? La grandezza Q è uguale ad $\alpha + \beta f. \cos. \varphi + \gamma f^2. \cos. 2\varphi + \delta f^3. \cos. 3\varphi +$ ec. L'altra q ne pareggia $\beta f. \mathrm{sen}. \varphi + \gamma f^2. \mathrm{sen}. 2\varphi + \delta f^3. \mathrm{sen}. 3\varphi +$ ec. : ove le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ec. sono i coefficienti di un Polinomio, che ne dinota la X. Di una consimil espressione son le altre P, p, R, r. E di un più grande inviluppo sono cotesti regolatori de' casi della Regola IV. Onde ciascuno dovrebbe stentar molto non pure a memorarsele, ma a regolarne con tali esemplari i varj casi. La soverchia generalità di un argomento, sia lecito il dirlo, se mai ne ritardi, o ne difficulti il disimpegno de' casi ovvj, che dee essere spedito ne' candidati di queste scienze, non è mica una lodevol cosa. Ed anzi ad essi è più confacevole l'aver delle Regole precise, e chiare per le frequenti indagazioni, e da queste poi col didascalico lume alle più rare, e generali ingradarsi. L'utilità di questo Metodo, che abbiam voluto quì dimostrare *a priori*, sarà benanche confermata dagli esempli, che dopo di aver quelle Regole in un sol punto riunite, produrremo.

PROP.

(a) Veggasi il Cap. XII. *Introd. all' Anal. degl' Inf.*, e l'ultimo Cap. *Calc. Diff.*

PROP. VII. TEOR.

§. 43. *Se dal Numeratore di una data Frazione sottraggasi il Numeratore della prima di lei parziale moltiplicato per lo Denominatore della Frazione del complemento; un tal Residuo uguagliatosi a zero sarà la prima Equazione determinatrice delle quantità assunte in detta parziale : e l'altra determinatrice ne sarà il denominatore di questa fattosi uguale a zero.*

Inoltre la prima di coteste due Espressioni, ove siensi posti i valori di quelle grandezze assunte, sarà sempre divisibile per l'altra. Ed un tal quoziente sarà il Numeratore della Frazione del Complemento, o dovrà impiegarsi, come il Numeratore della data per rinvenirne in simil guisa quello della seconda parziale. E così più appresso, se conviensi.

Dim. Ognun, che rifletta a ciò, che ampiamente si è recato nelle Regole già dette, può supplir di leggieri la dimostrazione a questo Teorema, che quelle insiem comprende.

§. 44. *Scol.* Quel Problema generale, cui l'Eulero ridusse le risoluzioni de' Fratti Genuini (27), doveasi accuratamente in un sol Teorema convertire, che in un contenesse le diverse Regole di siffatti risolvimenti: e ciò per nitore di scienza, e per una comoda intelligenza di chi brami possederla. Or tanto ci è sembrato di aver noi quì eseguito: nè altro ci resta a fare, che illustrar tali cose cogli Esempj.

Esempio I.

§. 45. *Data la Frazione* $\frac{xx}{(x-1)\,(1+xx)}$, *rinvenirne per la Reg. I. i numeratori di coteste sue parziali* $\frac{A}{(x-1)} + \frac{V}{1+xx}$.

Soluz. Paragonando questa data frazione a quella, che abbiamo generalmente proposta nella Reg. I., cioè alla $M:(x-a)X$, si

vedrà immantinente dover essere $M = xx$, $X = 1+xx$, ed $a = 1$. Dunque in virtù di tal Regola sarà

$$A = \frac{xx}{1+xx} = \frac{1}{2}, \text{ ponendovi } x = 1.$$

E la V numeratore della frazione del complemento, ch' è quanto il quoto (28) di $M - AX$ per $x - a$, qui dovrà uguagliare l'espressione $xx - \frac{1}{2}(1+xx)$ divisa per lo binomio $x-1$: cioè, fatte le riduzioni, ei sarà uguale ad $\frac{1}{2}(xx-1):(x-1) = \frac{1}{2}(x+1)$. Vale a dire è la $V = \frac{1}{2}(x+1)$. Onde sarà la data Frazione

$$\frac{xx}{(x-1)(1+xx)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{x+1}{2(1+xx)}.$$

Esempio II.

§. 46. *Data la Frazione* $\frac{xx}{(1-x)^3(1+xx)}$, *ritrovarne per la Reg. II. i numeratori di queste sue parziali* $\frac{A}{(1-x)^3} + \frac{A'}{(1-x)^2} + \frac{A''}{(1-x)} + \frac{V}{1+xx}$.

Soluz. Paragonando questa data frazione alla $\frac{M}{X(a-x)^n}$ proposta generalmente (a) nella Regola II. Coroll. III. si vedrà dover essere $M = xx$, $X = 1+xx$, $a = 1$, ed $n = 3$. E per quel che si è detto nella soluzione dell'Esempio superiore, si potrà anche quì conchiudere, che sia il numeratore della prima parziale

$$A = \frac{xx}{1+xx} = \frac{1}{2}, \text{ pon. } x = 1$$

E' che la M', che (32) dee essere uguale all'esatto quoziente di $M - AX$ per $a - x$, quì poi ne uguagli $-\frac{1}{2}(x+1)$.

II. In-

(a) Questo Esempio si è preso dall' Eulero §. 44. *Intr. An. Infin.*

II. Inoltre per la Regola II. dee essere il numeratore della seconda parziale uguale a ciò, che ne diventa il fratto $M':X$ al porvisi a per x. Dunque sarà ne' valori di queste grandezze quel numeratore

$$A' = -\frac{1}{2} : \frac{x+1}{1+xx} = -\frac{1}{2}, \text{ pon. } x=1;$$

E la M'', che dee dinotare l'esatto quoto di $M'-A'X$ per $a-x$; sarà per questi valori delle M', A', ed a uguale al quoto di $-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}(1+xx)$ per $1-x$, cioè al quoto di $\frac{1}{2}(xx-x)$ per $1-x$. Vale a dire sarà $M''=-\frac{1}{2}x$.

III. Similmente in virtù della medesima Regola vuol esserne il numeratore della terza parziale uguale a ciò, che ne diviene il fratto $M'':X$, qualor vi si ponga a per x. Dunque ne' valori di queste altre grandezze sarà

$$A'' = -\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{1+xx} = -\frac{1}{4}; \text{ pon. } x=1;$$

E la M''', che n'esprime il quoto di $M''-A''X$ per $a-x$, dovrà esserne per gl'indicati valori delle M'', A'', X, ed a uguale al quoto di $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}(1+xx)$ per $1-x$, cioè al quoto di $\frac{1}{4}(1-x)^2$ per $1-x$. Vale a dire sarà $M'''=\frac{1}{4}(1-x)$.

IV. Ma in vigor della medesima Regola dee esservi $V=M'''$. Dunque sarà

$$V=\frac{1}{4}(1-x)$$

E quindi le richieste frazioni parziali saranno

$$\frac{1}{2(1-x)^3} - \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1-x}{4(1+xx)}$$

Esem-

Esempio III.

§. 47 *Data la Frazione* $\frac{xx}{(1-x+xx)(1+x^4)}$, *ritrovarne per la Reg. III. i numeratori di queste sue parziali* $\frac{A+Bx}{1-x+xx}+\frac{V}{1+x^4}$.

Soluz. Suppongasi uguale a zero (38) il trinomio $1-x+xx$; sarà $xx=x-1$: e quindi la x^4, che per tal Equazione dee uguagliare $xx-2x+1$, sarà con quel riducimento uguale ad $(x-1)-2x+1=-x$. Dunque paragonando la data Frazione alla $M:X\,(xx-2ax+cc)$ generalmente proposta nella Regola III., dovranno essere

$$M=xx=x-1,\ X=(1+x^4)=1-x,\ \text{ed}\ Xx=x-xx=1.$$

E quindi sostituendo nell' Equazione $M-AX-BXx=0$ i valori ridotti delle M, X, ed Xx, ne verrà quest' altra

$$x-1-A+Ax-B=0.$$

Ove pareggiando a zero i coefficienti de' termini analoghi, sarà

$$-1-A-B=0,\ \text{ed}\ 1+A=0.$$

Cioè a dire dovrà essere

$$A=-1,\ \text{e}\ B=0.$$

Ed essendo (38) la V numeratore della frazione del complemento uguale al quoto di $M-AX-BXx$ per $1-x+xx$, ove siensi posti i valori di già ritrovati delle A, e B, ed i proprj valori delle M, X, ed Xx; sarà il detto numeratore

$$V=\frac{x^4+xx+1}{1-x+xx}=xx+x+1.$$

E finalmente dovrà essere la data frazione

$$\frac{xx}{(1-x+xx)(1+x^4)}=\frac{-1}{1-x+xx}+\frac{xx+x+1}{1+x^4}.$$

§. 48.

§. 48. *Scol.* Nel seguente esempio la frazione del complemento $\frac{xx+x+1}{1+x^4}$ sarà risoluta nelle sue parziali, dopo averne presi i fattori duplici reali $1+x\sqrt{2}+xx$, ed $1-x\sqrt{2}+xx$ del suo denominatore $1+x^4$ (*a*).

Esempio IV.

§. 49. *Data la Frazione* $\frac{xx+x+1}{(1+x\sqrt{2}+xx)(1-x\sqrt{2}+xx)}$ *rinvenirne per la Regola III. i numeratori delle sue parziali*

$$\frac{A+Bx}{1+x\sqrt{2}+xx}+\frac{C+Dx}{1-x\sqrt{2}+xx}.$$

Soluz. Ponendo uguale a zero il trinomio $1+x\sqrt{2}+xx$ denominatore della prima di queste due parziali (38), ne verrà $xx=-x\sqrt{2}-1$. E quindi (38) paragonando la data frazione alla generalmente proposta in detta Regola, cioè alla $M:X(xx-2ax+cc)$, dovrà esserne

$$M=xx+x+1=x(1-\sqrt{2}),\ X=1-x\sqrt{2}+xx=-2x\sqrt{2},$$

Ed $Xx=-2xx\sqrt{2}=2\sqrt{2}+4x$.

Dunque l'Equazione $M-AX-BXx=0$ con (38) porvisi cotesti valori delle M, X, ed Xx di già ridotti diverrà

$$x(1-\sqrt{2})+2Ax\sqrt{2}-2B\sqrt{2}-4Bx=0$$

Ove pareggiando a zero i coefficienti de' termini analoghi, avrassi

$$-2B\sqrt{2}=0,\ \text{ed}\ 1-\sqrt{2}+2A\sqrt{2}-4B=0,\ \text{cioè}$$

$$B=0,\ \text{ed}\ A=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Intan-

(*a*) L'esempio III., e l'altro, che segue, gli abbiamo presi dall' Eulero *Intr. all' Anal. dell' Inf. pag.* 164. 165. eseguendoli col nostro metodo, ch' è assai più semplice dell' Euleriano, come ognuno può intenderlo dal parallelo, che potrà farne.

Intanto collo stesso metodo; ma col supporne uguale a zero il denominatore della seconda parziale $1-x\sqrt{2}+xx$, si troverà

$$D=0\,,\ \text{e}\ C=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Onde le richieste parziali saranno

$$\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1+x\sqrt{2}+xx}+\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-x\sqrt{2}+xx}$$

Esempio V.

§.50. *Data la Frazione* $\frac{x-x^3}{(1+xx)^4\,(1+x^4)}$, *ritrovare i numeratori di queste sue parziali* $\frac{A+Bx}{(1+xx)^4}+\frac{A'+B'x}{(1+xx)^3}+\frac{A''+B''x}{(1+xx)^2}+\frac{A'''+B'''x}{1+xx}+\frac{V}{1+x^4}$.

Soluz. I. Si supponga (39) il binomio $1+xx=0$. Dovrà esserne $xx=-1$, e con ciò $x^3=-x$, $x^4=1$, $x^5=x$. E quindi paragonando questa data frazione a quella della Regola IV. sarà (*a*)

$$M=x-x^3=2x,\ X=1+x^4=2,\ Xx=x+x^5=2x$$

E l'Equazione $M-AX-BXx=0$, di cui dovrem pareggiarne (39) a zero i termini analoghi per vi determinare le assunte A, e B, diverrà co' valori ridotti delle M, X, ed Xx

$$2x-2A-2Bx=0,\ \text{onde sarà}\ A=0,\ B=1.$$

II. Inoltre l'espressione $(M-AX-BXx):(1+xx)$ con porvi i valori delle A, e B di già determinati, ed i proprj valori delle M, X, Xx, diviene $-x^3(1+xx):(1+xx)=-x^3$. Dunque (39) sarà

(*a*) La grandezza X ha due valori, l'uno proprio, e che le appartiene per la natura del dato fratto; e l'altro, che il potrem dire *ridotto*, perchè ella sel racquista pel nostro riducimento. Or questo secondo valore conviene impartire alla X in ogni Equazione determinatrice delle grandezze assunte. E lo stesso intendasi della Xx, e convenevolmente delle M, M', M'', ec.

sarà $M' = -x^3$. E l' Equazione $M' - A'X - B'Xx = 0$ determinatrice delle assunte A', e B' (40), ridurrassi (con vi si riporre que' valori ridotti delle x^3, X, ed Xx) alla seguente

$$x - 2A' - 2B'x = 0 \text{, e sarà quindi } A' = 0 \text{, e } B' = \tfrac{1}{2}.$$

III. Similmente quest' altra espressione $(M' - A'X - B'Xx) : (1+xx)$; co' valori di già esibiti delle A', e B', e co' proprj valori delle M', X, ed Xx, si riduce a $(-x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^5) : (1+xx)$, cioè a $-\frac{1}{2}(x+x^3)$, eseguita una tal divisione. E sarà (39) quindi $M'' = -\frac{1}{2}(x+x^3)$: e l' Equazione $M'' - A''X - B''Xx = 0$, che destinasi a determinarvi le A'', e B'', dovrà co' valori ridotti delle M'', X, ed Xx degenerar nell' altra

$$-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x - 2A'' - 2B''x = 0 \text{. Ed avrassi } A'' = 0 \text{, e } B'' = 0.$$

IV. Finalmente l' espressione $(M'' - A''X - B''Xx) : (1+xx)$, ove pongansi i valori delle M'', A'', X, B'', Xx, diviene $-\frac{1}{2}x(1+xx) : (1+xx) = -\frac{1}{2}x$. Dunque (40) sarà $M''' = -\frac{1}{2}x$. E l' Equazione $M''' - A'''X - B'''Xx = 0$, che serve a determinar le A''', e B''', qualora vi si ripongano i valori ridotti delle M''', X, ed Xx, diverrà

$$-\tfrac{1}{2}x - 2A''' - 2B'''x = 0 \text{, e ne darà } A''' = 0 \text{, e } B''' = -\tfrac{1}{4}$$

V. Il perchè, se vogliasi il numeratore V della frazione del Complemento, si dovrà (41) dividere per $1+xx$ l' espressione $M''' - A'''X - B'''Xx$, nella quale siensi posti i valori delle M''', A''', e B''' determinati nel n. IV. non men, che quelli delle X, ed Xx del n. I. E sarà $V = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^5) : (1+xx)$, cioè fatta la divisione, dovrà risultarne

$$V = -\tfrac{1}{4}x(1-xx).$$

Onde le richieste parziali saranno

$$\frac{x}{(1+xx)^4} \pm \frac{\frac{1}{2}x}{(1+xx)^3} * - \frac{\frac{1}{4}x}{1+xx} - \frac{\frac{1}{4}x(1-xx)}{1+x^4}.$$

§. 51.

§. 51. *Scol.* La Frazione del Complemento potrebbe ancor essa risolversi in due frazioni parziali, i cui denominatori sieno $1+x\sqrt{2}+xx$, ed $1-x\sqrt{2}+xx$, come si è praticato nell' esempio terzo. E lo stesso potrebbe ottenersi col metodo delle eliminazioni. Lo che intendasi anche pel citato esempio (*b*).



OPU-

(*b*) Queſto eſempio lo abbiamo tratto dall' Eulero *Introd. nell' Analiſi degl' Inf. vol.* 1. *pag.* 173.; ove il Valentuomo colla guida delle formole da lui propoſte il disbriga, e con aver quelle col ſoccorſo di grandezze immaginarie, e funzioni circolari, e con molti ſtenti rilevate. E lo ſteſſo notiamo per gli Eſempj III. e IV.

OPUSCOLO VI.

Continuazione dello stesso argomento.

§. 52. Due cose nel precedente Opuscolo per rigor di metodo omesse si deggiono rapportare in quest'altro per vi render complete le Teorie. Ed in prima gioverà intendere, come potrem valerci del Calcolo differenziale per risolvere alcuni di cotesti Problemi in facil modo. E quali ripieghi avrem poi a praticare, quando, ignorandone la X denominatore della frazione del Complemento, ne dovremo le precedenti Regole usare.

PROP. VIII. TEOR.

§.53. *Volendo risolvere il dato Fratto* $\frac{M}{X(x-a)^n}$ *nelle frazioni parziali* $\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A'}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{n-2}}\ldots+\frac{V}{X}$; *il numeratore di ciascuna di coteste parziali, la cui località si chiami r generalmente; dovrà esserne* $\frac{1}{1.2.3\ldots r-1.dx^{r-1}}\,d^{r-1}\frac{M}{X}$: *ponendovi* $x=a$ *dopo il riducimento del calcolo.*

Dim. L'Equazione proposta in questo Teorema si moltiplichi per $(x-a)^n$; se ne avrà quest'altra

$$\frac{M}{X}=A+A'(x-a)+A''(x-a)^2\ldots+\frac{V(x-a)^n}{X}. \qquad H$$

Ove supponendo $x-a=0$, dovrà esserne A, come più volte (28. 32.) lo abbiam detto, uguale a ciò che ne diventa il fratto $\frac{M}{X}$ al por-

 visi

visi a per x. Inoltre si differenzii l'Equazione H più volte di seguito, e propriamente il numero $n-1$ di volte, e dopo ciascheduna di queste differenziazioni pongasi $x-a=0$. Sarà chiaro pe' principj del Calcolo Differenziale, che dopo la prima delle già dette operazioni, e con poi supporvi $x-a=0$, debba restarne $d.\frac{M}{X}=A'dx$. Dunque dovrà esserne il numeratore $A'=\frac{1}{dx}d.\frac{M}{X}$. Similmente dopo la seconda differenziazione dell' Equazione H, e con porvisi $x-a=0$, dovrà risultarne $d^2.\frac{M}{X}=2A''dx^2$, cioè $A''=\frac{1}{1.2.dx^2}d^2.\frac{M}{X}$. E così dopo la terza, e poi con farne $x-a=0$, si troverà $A'''=\frac{1}{1.2.3.dx^3}.d^3.\frac{M}{X}$. Dunque potrem conchiudere per induzione che, se la r ne indichi la località di una di coteste parziali, il numeratore di essa debba esser quello, che si è proposto nel Teorema.

§. 54. *Coroll. I.* Si moltiplichi per X l'Equazione H, e poi si trasportino nel I. membro di essa tutti i termini, che ritrovansi nel secondo all'infuora dell'ultimo; ne verrà quest' altra Equazione

$$M-AX-A'X(x-a)-A''X(x-a)^2-\ldots=V(x-a)^n, \quad K$$

da cui potran raccorsi agevolmente i valori delle grandezze A', A'', ec. con differenziarla di seguito il numero di volte $n-1$, e con porvi dopo ciascuna di tali operazioni $x-a=0$.

§. 55. *Coroll. II.* E con tal guida operando n' emergon le sottoposte Equazioni determinatrici delle A', A'', ec. cioè

$$dM-AdX-A'Xdx=0$$

$$d^2M-Ad^2X-2A'dXdx-2A''Xdx^2=0$$

etc. . . . .

Esem-

Esempio.

§. 56. *Data la Frazione* $\frac{x+1}{xx(x-1)^3}$, *ritrovare col Metodo precedente i numeratori di queste sue parziali* $\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{V}{xx}$

Soluz. La frazione $\frac{M}{X}$, di cui debbonsi prendere i differenziali successivi, quì si riduce alla $\frac{x+1}{xx}$. Ed è poi $d.\frac{x+1}{xx}=-dx\left(\frac{x+2}{x^3}\right)$, e $d^2.\frac{x+1}{xx}=dx^2\left(\frac{2x+6}{x^4}\right)$, come l'è noto dal Calcolo Differenziale. Dunque sarà (53)

$$A=\frac{x+1}{xx}=2\text{ , pon. }x=1$$

$$A'=\frac{1}{dx}.dx\left(\frac{-x-2}{xx}\right)=-3\text{ , pon. }x=1$$

$$A''=\frac{1}{2\,dx^2}.dx^2\left(\frac{2x+6}{x^4}\right)=4\text{ , pon. }x=1$$

E cotesti valori delle A, A', A'' si rinverrebber benanche colla Regola II. agevolmente: e la V col prescritto di essa sarebbe uguale a $-4x-1$.

§. 57. *Scol. I.* Il Principio dimostrativo, ch'è di luce a questo Teorema, è analogo a quello, onde suol dimostrarsi il famoso Teorema del Mac-Laurin. Noi lo possiam ridurre ne' seguenti termini: *Se tra due espressioni analitiche intercéda un' Equazione Identica, che poi si differenzii più volte di seguito; dovranno essere tra se uguali i primi differenziali di esse, i secondi, i terzi, ec. Ed in ognuna di queste nuove Equazioni Identiche potrà supporsi la variabile* x *uguale ad una costante* a *per vi determinare certe grandezze assunte.* Ma il sommo Eulero, e dopo di lui gl' insigni Analisti

Cou-

Cousin, Paoli, la Croix, ed altri adottan quest'altro Principio a tal uopo. *Il numeratore del valore della* V *essendo* (*not. f.* 32) *divisibile per* $(x-a)^n$, *tutti i differenziali di esso fino a quello dell'ordine* $n-1$ *inclusivamente dovranno svanire al porvisi* $x-a=0$. Or noi per ragion di Metodo abbiam trascelto il primo di questi due Principj; il quale, oltre ad esser vero intuitivamente, l'è anche identico a'Principj dimostrativi nel precedente Opuscolo usati (37). Con un somigliante metodo si potrebbon benanche rilevare i numeratori delle parziali della seguente forma $(A+Bx):(xx-2ax+cc)^n$. Ma non essendo in tal caso nè sì precise le regole, nè sì chiari i calcoli convenienti, come il sono nel nostro Teorema, fia meglio l'omettere tal ricerca, ed alla Regola IV. attenersi.

PROP. IX. PROBL.

§.58. *Dato un Fattore semplice, o duplice reale* (16.27) *del Denominatore della Frazione* $\frac{M}{N}$, *ma senza esserci noto l'altro di lui fattore, o senza poterlo comodamente rilevare per la divisione; vuol ritrovarsi il numeratore di quella Frazione parziale, che avrebbe il fattor dato per denominatore.*

Soluz. La grandezza F dinoti il dato fattore della N, siasi egli lineare, o pur duplice reale: e la $\downarrow$ n'esprima il rapporto del differenziale della N a quello della F. Io dico, che per poter nel primo caso rinvenire quel richiesto numeratore debbansi maneggiar colla guida della Regola I. le due Equazioni $M-A\downarrow=0$, ed $x-a=0$. E che nell' altro convenga maneggiar le due altre Equazioni $M-A\downarrow-B\downarrow x=0$, ed $xx-2ax+cc=0$ colla guida della Regola III.

Dim.

Dim. Chiamando X quell' ignoto fattore della N denominatore del dato fratto, sarà chiaro dover esser la grandezza $X = \frac{N}{F}$. E ponendo uguale a zero il dato fattore F, (la qual supposizione è (*Reg.prec.*) un Principio euristico di siffatte indagini) ne verrà benanche $N = o$; e sarà quindi l' indicato fratto

$$\frac{N}{F} = \frac{o}{o} = \frac{dN}{dF} = \dashv :$$

Imperciocchè il rapporto di due grandezze, che insiem ne svaniscono, è quanto quello (*a*) de' differenziali loro, cioè quanto la $\dashv$, che quì sopra abbiamo introdotta a disegnarlo. Dunque quell' ignoto fattore X dovrà acquistarsi il valore $\dashv$, quando il dato fattore F divien zero, cioè quando dovrem valerci della Regola I. o della III., che su tal supposizione son fondate. E quindi nel primo caso le due Equazioni $M - A\dashv = o$, ed $x - a = o$ saran potenti a determinarne il numeratore della richiesta frazione. E nell' altro caso si dovran maneggiar a tal uopo, e colla guida della Regola III. le due altre Equazioni $M - A\dashv - B\dashv x = o$, ed $xx - 2ax + cc = o$.

§. 59.

(*a*) Egli è di per se noto, che ftia $N : F :: N + dN : F + dF$. Or fuppongafi, che infiem ne svaniffero le due N, ed F; il rapporto loro fi vedrà in tal cafo effer quanto quello di dN a dF, cioè $\frac{o}{o} = \frac{dN}{dF}$. Lo fteffo potrà geometricamente ritrarfi nel feguente modo. Da un qualunque punto di una curva intendafi condotta una perpendicolare su di una fottopofta ordinata all' affe. Saran grandezze variabili la detta perpendicolare, e la parte dell' ordinata, ch' ella ne tronca verfo la curva. Intanto il rapporto, che avranno quefte due grandezze variabili nel fimultaneo loro svanimento, farà quanto quello della fottangente all' ordinata.

§. 59. *Coroll. I.* Il fattore F suppongasi uguale al binomio $x-a$: sarà in tal caso $dF=dx$. E supponendo la F uguagliarne il trinomio $xx-2ax+cc$, sarà per quest' altro caso la $dF=2dx(x-a)$. Dunque per averne in amendue questi casi i rispettivi numeratori della richiesta parziale, convien usare le seguenti Equazioni:

$$A=\frac{Mdx}{dN}, \text{ pon. } x=a,$$

$$A+Bx=\frac{M.\,2dx(x-a)}{dN}; \text{ pon. } xx=2ax-cc \ (\textit{Reg. III.})$$

§. 60. *Coroll. II. Il rapporto, che han due grandezze nel loro simultaneo svanimento, è quanto quello de' differenziali loro.* E, se questi primi differenziali benanche ne svanissero insieme, converrebbe a tal uopo ricorrere a' secondi differenziali di dette grandezze. E così più oltre dovrebbesi procedere, se ne abbisogni. La qual cosa è nota dal Calcolo Differenziale. Ma in qualunque altro caso, cioè se le dette grandezze non svaniscano insieme (*b*), esse non saran proporzionali a' differenziali loro generalmente.

§. 61. *Coroll. III.* Se il dato fattore del denominatore N sia $(x-a)^r$, il valore, che si acquisterà l' altro fattore X al farvisi $x-a=0$, sarà

(*b*) Un insigne Analista suol dire su tal proposito: „ Il mezzo più „ semplice per ottenere in tal caso il valore della X, è di divider la N „ per la $x-a$. Fra di tanto vi si può pervenire per la differenziazione. " Or un giovane da cotesti concetti non ben misurati potrebbe credere, che questo secondo risultato sia identico al primo; o che due funzioni di una grandezza variabile abbian sempre fra loro il medesimo rapporto de' differenziali di esse. Intanto la diversità de' detti risultati conoscesi *a priori* per le ragioni addotte in questa dimostrazione, ed *a posteriori* pe' due esempj aggiunti ad essa.

sarà uguale a $\frac{d^n N}{1.2.3\ldots n dx^n}$, pon. $x=a$. Lo che è chiaro (57) pel Calcolo Differenziale, e dal precedente Coroll.

§. 62. *Coroll. IV.* A quel Principio di Analisi assai noto, che abbiam recato nel Coroll. II., convien aggiungervi quest' altro, che sembraci recondito, e che poi l' è al caso nostro adattato. Cioè *il differenziale di una qualunque Funzione della x diviso per lo differenziale di un di lei fattore, il qual si supponga uguale a zero, è quanto ne diventa l' altro fattore in tal supposizione* (c).

Esempio I.

§. 63. *Data la Frazione* $\frac{x^m}{1+x^n}$, *ove la* n *sia un numero impari, e quindi* $1+x$ *un fattore del binomio Cotesiano* $1+x^n$, *ritrovare il numeratore* A *della sua frazione parziale* $\frac{A}{1+x}$.

Soluz. Il rapporto, che han le due grandezze $1+x^n$, ed $1+x$ nel simul-

(c) La dimostrazione Euleriana procede nel seguente modo: „ Essendo „ nel primo caso la $X=N:(x-a)$; il numeratore A, che si è dimo- „ strato (28) uguale a ciò che ne diventa $\frac{M}{X}$ al porvisi a per x, sarà „ uguale ad $M(x-a):N$, ove suppongasi benanche $x-a=0$. Ma poichè „ in tal caso vedesi di questo fratto svanirne sì il numeratore, che il de- „ nominatore, il suo valore, come costa dal Calcolo Differenziale, sarà „ $(Mdx+(x-a)dM):dN$, pon. $x=a$. Cioè, per esserne $x-a=0$, ne ri- „ sulta $A=Mdx:dN$, pon. $x=a$. " Ma noi abbiamo staccata la X, o la N:F dalle grandezze, che servono alla determinazione delle quantità assunte, e presone il suo valore nel simultaneo svanimento delle N, ed F, lo combiniamo con quelle giusta la Regola I. o la III.

simultaneo loro svanimento (60), è uguale ad nx^{n-1}. Dunque sarà per la Regola I.

$$A = \frac{x^m}{nx^{n-1}} = \pm \frac{1}{n}; \quad \text{pon. } x = -1$$

Ove il segno superiore vale per la m pari, e l'inferiore per la impari.

Esempio II.

§. 64. *Data la frazione* $\frac{2+x^3}{1-x^4}$, *rinvenirne col metodo proposto la sua parziale* $\frac{A+Bx}{1+xx}$.

Soluz. Il rapporto, che han le due grandezze $1-x^4$, ed $1+xx$ nel simultaneo loro (60) svanimento, uguaglia $-2xx$. Dunque nell' Equazione determinatrice delle assunte A, e B, cioè nella $M-AX-BXx=0$, dovrà porsi $-2xx$ per X: ed ella poi dovrà combinarsi coll'altra determinatrice $1+xx=0$, giusta la Regola III. Si avrà in tal modo

$$2+x^3+2Axx+2Bx^3=0$$

Cioè ponendovi $xx=-1$, e quindi $x^3=-x$, sarà

$$2-x-2A-2Bx=0: \text{ e sarà quindi}$$

$$A=1, \text{ e } B=-\tfrac{1}{2}$$

Onde sarà $1-\frac{1}{2}x$ il numeratore della richiesta parziale. Con questo stesso Metodo si troverà esser $1+\frac{1}{2}x$ il numeratore della frazione del Complemento. E quest'altra frazione potrebbesi benanche rinvenire togliendo la prima parziale dalla data frazione: come l'è chiaro. Ma per tali ricerche non dovrà impiegarsi la II. parte della Regola III., se non sia nota la X generalmente, qual si conviene (38) a tal uopo.

PROP.

PROP. X. TEOR.

§. 65. *Sia* $xx-2x.\cos.\varphi+1$ *un fattore trinomiale del Binomio* $1-x^n$ *denominatore del fratto genuino* $\frac{x^{m-1}}{1-x^n}$, *ove sia la* n *maggiore della* $m-1$; *dico esserne* $\frac{2}{n}\cos.(n-m+1)\varphi-\frac{2x}{n}\cos.(n-m)\varphi$ *il numeratore di quella frazione parziale, che dee avere per denominatore un tal Trinomio.*

Dim. Il Fattore F quì (58) vedesi uguagliarne $xx-2x.\cos.\varphi+1$; ed è poi $N=1-x^n$, ed $M=x^{m-1}$. Dunque sarà $dF=2dx(x-\cos.\varphi)$; $dN=-nx^{n-1}dx$, $dN:dF=\frac{n}{2}x^{n-1}:(\cos.\varphi-x)$, e quindi $M.dF:dN=\frac{2}{n}(\cos.\varphi-x):x^{n-m}$: Onde l'Equazione determinatrice delle grandezze assunte A, e B sarà

$$A+Bx=\frac{2}{n}(\cos.\varphi-x):x^{n-m} \qquad H$$

Ciò posto, si faccia per brevità di calcolo $n-m=r$; e l'anzidetta Equazione si moltiplichi per x^r; avrassi $Ax^r+Bx^{r+1}=\frac{2}{n}(\cos.\varphi-x)$. E, ponendo in quest'ultima Equazione i valori delle x, x^r, x^{r+1} esibiti ne' §§. 21, e 22, sarà

$$\left.\begin{array}{l} A.\cos.r\varphi+A.\text{sen}.r\varphi\sqrt{-1} \\ +B.\cos.(r+1)\varphi+B.\text{sen}.(r+1)\varphi\sqrt{-1} \end{array}\right)=-\frac{2}{n}\text{sen}.\varphi\sqrt{-1} \qquad K$$

Inoltre si pareggino tra loro i termini reali, e gl' immaginarj (a) dell' Equazione K; si avranno le due seguenti Equazioni deter-

12 mi-

(a) Allorchè una Equazione comprende termini reali, ed immaginarj, converrà porre separatamente uguale a zero la somma de' primi, e quella poi de' secondi; affinchè non emerga quell'assurdo, che grandezze reali vi potesser pareggiar le immaginarie. Ma lo stesso può anche comprendersi dall'esser doppia l'Equazione K; ove potrebbesi apporre il gemino segno $\pm$ a que' termini, che contengono grandezze immaginarie (22).

minatrici delle A, e B, cioè

$$A.\cos.r\varphi + B.\cos.(r+1)\varphi = 0\,,\quad \text{ed}$$

$$A.\text{sen}.r\varphi + B.\text{sen}.(r+1)\varphi = -\tfrac{2}{n}\,\text{sen}.\varphi$$

Intanto dalla prima di queste due Equaz. ottiensi $A = -(B.\cos.(r+1)\varphi):\cos.r\varphi$. E la seconda col sostituirvisi cotesto valore dell' A diviene $B(\text{sen}.(r+1)\varphi.\cos.r\varphi - \text{sen}.r\varphi.\cos.(r+1)\varphi):\cos.r\varphi = -\tfrac{2}{n}\text{sen}.\varphi$. Dunque simplificando il primo membro di quest'ultima Equazione cogli ovvj principj di Trigonometria, avrassi (*b*)

$$B = -\tfrac{2}{n}.\cos.r\varphi\,,\ \text{ed}\ A = \tfrac{2}{n}.\cos.(r+1)\varphi\,,\ \text{e sarà quindi}$$

$$A = \tfrac{2}{n}\cos.(n-m+1)\varphi\,,\ \text{e}\ B = -\tfrac{2}{n}\cos.(n-m)\varphi\,.$$

§. 66. *Coroll. I.* L' angolo φ, come rileviamo dal Teorema Cotesiano, dee avere la seguente forma $\frac{2K\pi}{n}$, ove la π n'è la somma di due angoli retti, e la $2K$ non dee esser maggiore della n. Dunque sarà $\cos.(n-m)\varphi = \cos.\frac{n-m}{n}2K\pi = \cos.\frac{2Km}{n}\pi$, e

$$\cos.(n-m+1)\varphi = \cos.\frac{n-m+1}{n}2K\pi = \cos.\frac{m-1}{n}2K\pi.$$

§. 67. *Coroll. II.* Vale a dire deggion essere

$$A = \frac{2}{n}.\cos.\frac{m-1}{n}2K\pi\,,\ \text{e}\ B = -\frac{2}{n}\cos.\frac{2Km}{n}\pi$$

§. 68. *Coroll. III.* Con un simigliante artifizio si potrebbero determinare le frazioni parziali del seguente fratto $\frac{x^{m-1}}{1+x^n}$:

§. 69.

(*b*) Cotesta ricerca avrebbesi potuto instituire con funzioni circolari esenti da grandezze immaginarie, cioè colla formola del §. 23. Ma l' un metodo, o l'altro convien quì praticare, per esserne gli esponenti n, ed m indeterminati.

§. 69. *Scol.* Il sommo Eulero co' principj del Calcolo Differenziale, e colle Teorie da lui stabilite nell' Introduzione all' Analisi degl' Infiniti perviene ad indagar le A, e B in questi due casi, ed in altri affini. Noi diriggiamo i Geometri all' ultimo Capo del suo Calcolo Differenziale, perchè contestino non esser coteste indagini Euleriane all' intelligenza de' Giovani adattate. E sebbene egli nel Calcolo Integrale pag. 49. vol. I. da tali Principj ne assegni alla grandezza A un valor diverso dal quassù recato, facendone cotesta grandezza

$$A = \frac{2}{n}\,\text{sen.}\,\frac{2K\pi}{n}\,\text{sen.}\,\frac{2mK\pi}{n} + \frac{2}{n}\,\text{cos.}\,\frac{2K\pi}{n}\,\text{cos.}\,\frac{2mK\pi}{n}\,;$$

nondimeno questa espressione cogli ovvj principj trigonometrici simplificata diviene uguale a $\frac{2}{n}\,\text{cos.}\,\frac{m-1}{n}\,2K\pi$.

§. 70. *Scol. II.* Perchè i diversi Metodi, onde può risolversi un Fratto nelle sue frazioni parziali, non inviluppino i Giovanetti, è di bene quì recarne un parallelo. Ed in primo luogo il Metodo dell' *Eliminazioni*, come si è detto più sopra (27), sovente l'è penoso, e talora l'è anche impraticabile. Nè poi può ottenersi il numeratore di una frazione parziale, se ordinariamente (*f*) non vi si ottengan tutti. II. Il Metodo Euleriano è di un concetto preciso, e di agevole eseguimento: dipendendone dalle prime operazioni dell' Algoritmo volgare. E 'l numeratore di ciascuna parziale può rinvenirsi indipendentemente da quelli delle seguenti. E ciò nelle Regole II, e IV. Inoltre III. il Metodo esposto nella Prop. VIII.,

e pe'

(*f*) Il Sig. Cramer, e dopo di lui il Bezout esibiscon distintamente i valori, che deggiono avere le diverse ignote di altrettante Equazioni semplici.

e pe' casi della Regola II. è di una semplicissima enunciazione; e vi si può ottenere il numeratore di ciascuna parziale, senza punto dipenderne dalle altre antecedenti, o conseguenti: bastandovi il saper prendere i successivi differenziali di un fratto razionale. IV. E quello, che abbiam rapportato ne' Corollarj di un tal Teorema, riduce le differenziazioni a grandezze intere razionali. Ma questo poi non è sì preciso, come il precedente, nè ciascuno de' detti numeratori può indipendentemente dagli altri rilevarsi. V. Finalmente i casi, che appartengonsi alle Regole I, e III, guidati col Calcolo Differenziale, come abbiam detto nella Prop. IX., talor disciolgonsi anche agevolmente.

Conclusione degli Editori.

I primi stami di sì leggiadra, ed utile Teoria furon prodotti nel principio del secolo trascorso da' due sommi Geometri Gotofredo Guglielmo Leibnitz, e Giovanni Bernulli (*a*): e nella metà di detto secolo il grand'Eulero le diè tal finimento, ed ampiezza, che ogni Analista d'attignerla dalle opere di lui non isdegna (*b*). Pur non di meno noi ci avvisiamo, che questi tre Opuscoli ritratti da' Corsi Analitici di nostra Scuola, abbiano ad impartir ad una tal Teoria quel didascalico chiarore, onde renderla a' giovani agevolmente apprendevole. Conciosiachè *le Definizioni, che vi si spargon per entro, ci sembrano assai convenienti, e precise: e tali son pure le altre verità, che quivi adunansi in forma di Teoremi, di Problemi,*

(*a*) Vegganſi gli Atti di Lipſia an. 1702., e que' di Parigi dello ſteſſo tempo.

(*b*) Dalle Teorie Euleriane rapportate in queſti tre ultimi Opuſcoli taluno può rilevare quanto inconſideratamente abbia detto il Signor Montucla nell' *Hiſtoir. des Mathem. Vol. III. pag.* 148. „ Monſieur Euler y donne „ une Methode, au moyen de la quelle, ſans recourir aux Calculs labo„ rieux de Leibnitz, et Bernoulli, on trouve ſucceſſivement les differens „ facteurs du denominateur de la fraction rationelle proposée. " Imperciocchè coteſta ricerca l'è un Poſtulato per l'Eulero (18): ed egli rivolge le analitiche ſue cure a rinvenirne i numeratori convenienti a' fattori del denominatore della data Frazione. Egli è vero, che l'acutiſſimo Giovanni Bernulli impegnavaſi con delle Equazioni Identiche a ritrovar non meno i numeratori, che i denominatori delle frazioni parziali *Atti di Lipſia an.* 1752. Ma ne' primi paſſi delle invenzioni talor non iſcorgeſi tant'oltre. Ed era ſerbato al ſuo illuſtre Allievo il grand' Eulero di ridurre la ſeconda delle anzidette indagini allo ſcioglimento delle Equazioni Algebriche, e d'impegnarſi al ſolo rinvenimento de' numeratori delle frazioni parziali.

mi, e di Corollarj (g). Le loro dimostrazioni, che per la piupparte son nuove, e da un medesimo Principio dipendenti, ci pajon tornite alla maniera Euclidea. I Metodi investigatori son di facilissimo concetto, e ritenevoli: e son pure agevoli i Calcoli, che vi si traggono. Il tutto è di ricche note corredato, e colmo di nuove speculazioni. Onde ci lusinghiamo, che queste cose non sien per essere discare a' Geometri, come son utili, e gradevoli a' Giovanetti: del che un' esperienza di più lustri n'è garante. Che se talun vi scorga cose men rette, o da doverle vie più chiarire, restrignere, o ampliare; noi gli saprem grado, s'ei ce le dinoti accuratamente. Ma ciò facendo ei non trascorra i limiti della Filosofica Moderazione, che i Geometri Illustri han mai sempre inviolatamente custoditi, e che talun' ingegni Partenopei, del che ne meniamo acerbo duolo, a trasaltar son usi. Ed anzi ei ci farebbe cosa assai grata, e che gli tornerebbe a sua maggior laude, se imprendesse ad estendere, o migliorare coteste analitiche utilissime disquisizioni. Ei potrebb' ingegnarsi a prender le Frazioni parziali di un Fratto, che accolga grandezze trascendenti, secondando gli ultimi desii dell' Eulero. Potrà risolvere la Frazione $\frac{x^m}{(1\pm x^n)^r}$ in altre con denominatori trinomiali, di che per altro noi ne conosciamo le giuste guide nell' integrarla, quando ella siane per dx moltiplicata.

(g) Per vie più chiarire a' giovani la Proposizione VII, che ci sembra la più importante, noi gli avvertiamo, che nell' enunciazione quel *denominatore ridotto a zero* deesi intendere semplificato, come osservasi in ciascuna delle quattro Regole. Cioè a dire, se tal denominatore sia $(x-a)^n$, la seconda Equaz. determinatrice sarà $x-a=0$. Se quello sia $(xx-2ax+cc)^n$, questa dovrà esser $xx-2ax+cc=0$.

cata. Finalmente ei potrà fare qualche altra cosa di suo piacimento, ed utile all'Analisi sublime. Ed a queste letterarie produzioni, e non mica a' trascorsi dell'insania, o del livore, ogni saggio protestasi di por mente.



OPUSCOLO VII.

DEL SIGNOR

D. STEFANO FORTE:

Risoluzione del celebre Problema della Cilindroìde di Wallis con altre ricerche affini.

§.I. EGli non è guari, che tra noi è pervenuto un Opuscolo del Padre D. Gregorio Fontana celebre Matematico nell' Università di Pavìa, ove tra l'altre cose ch' egli snoda o illustra, risolve coll' applicazione del Calcolo Integrale un insigne problema sulla Cilindroìde Wallisiana, ch' è un solido generato dal rivolgersi l' iperbole conica intorno al suo asse secondario. Il solo enunciamento d' un tal problema fu indicato dal Signor Fontenelle nel IX. anno di questo Secolo, allorchè si diè carico d' essersene nell'anno XCVII. dello scorso, presentata la soluzione dal Sig. Parent all' Accademia delle Scienze di Parigi; ma ella non ritrovandosi in verun modo registrata nè in tal Accademia, nè altrove, che che ne fosse cagione, si mosse il chiaro genio del Sig. d' Alembert ad invitare nell' Enciclopedìa il Lettore per esibirla. A me non lice d' encomiar l' industriosa maniera, onde il Sig. Fontana ha mirabilmente innestati i sublimi calcoli de' Moderni al proposto quesito per isnodarlo; poichè la mia giovanile età toglie molto di peso alle laudi, che ad un tal Personaggio, per singolarità di merito, e per chiarezza di

fama ragguardevolissimo, ottimamente si convengono. Dico solamente d'essermi stato ingiunto di tentare, se per altro sentiero al medesimo scopo giugner si potrebbe, adoperandosi per lo appunto l'Algebra comune, ovvero l'Analisi degli antichi Geometri, della cui venustà la nostra Italia si pregiò mai sempre, dappoichè la Greca coltura le fu per ereditaria successione interamente tramandata. Per lo che, quantunque scorgessi opera da non esser pulita colla mia lima, tuttavia riflettendo, che 'l diriggersi per malagevoli ricerche, suole almeno perfezionar l'ingegno dell'inventore, se pur soventi volte angusto calle a nobil terra non meni; mi accinsi perciò animoso al Geometrico lavoro: ed essendomi riuscito congegnarne una sintetica dimostrazione, la sottometto al rigoroso giudizio del Pubblico, perchè riceva quel finimento, che le conviene.

§. 2. Il problema proposto da' Matematici Francesi, e risoluto analiticamente dal P. D. Gregorio Fontana, è il seguente. *L'iperbole conica ANZ abbia per asse transverso la RA, ch'è l'asse maggiore dell'Ellisse ALR; si vuol sapere qual ragione abbia ad avere l'asse minore di questa al conjugato di quella, cioè la TL alla Pp, affinchè rivolgendosi queste curve intorno all'asse minore dell'Ellisse, sieno costantemente uguali le superficie della Cilindroide Wallisiana, e della Sferoide schiacciata, che vi si generano in tal modo.* Cioè a dire (ordinata ovunque all'asse minore dell'Ellisse la retta MS, e protrattala insino all'Iperbole in N) debb'esser sempre la superficie sferoidale generata dall'arco AS colla mentovata rivoluzione, uguale a quella, che vi si genera dall'arco iperbolico AN.

Tav IV. Fig. 1.

§. 3. L'illustre Padre Fontana si conduce nel seguente modo per isciorlo. Si chiami a il semiasse maggiore dell'Ellisse ALR, c il minore, e b il semiasse coniugato dell'Iperbole ZAY. Sia di più CM $=x$, MN$=y$, MS$=z$; sarà per la natura dell'Iperbole ZAY, e per quell'altra dell'Ellisse ALT

yy

$yy = aa + aaxx : bb$; e

$zz = aa - aaxx : cc$.

Si conduca nell' Iperbole la retta mn parallela alla MN, ed infinitamente vicina ad essa, e si chiami π la semiperiferia del raggio 1; sarà la superficie conica generata dall'archetto Nn rivolto intorno a CT uguale a $2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; e la superficie conica generatavi dall'altro Ss sarà pure $2\pi z\sqrt{(dx^2+dz^2)}$. Ciò posto pongansi nell' espressione $2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ i valori della y, e della dy^2, i quali agevolmente si ricavano della rapportata Equazione all' Iperbole: e poi s' integri l'espression che n' emerge, aggiugnendovi la convenevole costante. Cotesto Integrale dovrà dinotare un' indefinita parte della superficie della Cilindroide corrispondente all' ascissa x: e verrà un' aggregato di una parte algebrica, e di una log-mica. L' algebrica è la radice quadra di un Trinomio avente ciascun termine di quarta dimensione: e la log-mica contiene lo stesso radicale, ed un altro di due termini. L'integrale poi completo della seconda espressione $2\pi z\sqrt{(dx^2+dz^2)}$, che in simil modo si prende, ha la stessa forma del primo, e gli sarebbe identico, se fosse

$$bb : \sqrt{(aa+bb)} = cc : \sqrt{(aa-cc)}$$

Con che pareggiando queste due frazioni, affin di determinarvi la c semiasse minore dell' Ellisse, è da risolversi un' equazione biquadratica derivativa del secondo grado, onde rilevasi

$$c = \frac{ab}{\sqrt{(aa+bb)}} \text{, e con ciò } b = \frac{ac}{\sqrt{(aa-cc)}}$$

§. 4. Or essendomi applicato ad ordir la soluzione del proposto problema secondo il metodo degli Antichi, mi cadder nella mente sul bel principio le seguenti speculazioni. La superficie conica generata dal rivolgimento dell' archetto Ss intorno a TL è uguale ad Ss moltiplicato per la circonferenza del raggio MS. E poi

chè, adattandosi al punto S la normale SG all'Ellisse; e tirando st parallela a TL, riescon simili i triangoli Srs, SMG; sarà quindi Ss ad st, o ad Mm, come l'è SG ad SM, o come la periferia del raggio SG è a quella del raggio SM: onde il prodotto di Ss nella periferia di SM uguaglia quello di Mm nella periferia di SG; e con ciò a questo prodotto è uguale la detta superficie conica generata dall'archetto Ss. Per simil guisa, adattandosi al punto N dell'iperbole la normale ND, dimostrasi, che la superficie conica generata dall'archetto Nn nel suo rivolgersi intorno a TL, adegui il rettangolo di Mm nella circonferenza del raggio DN; laonde dovranno esser tali superficie come le periferie di SG, e di ND, ovvero come le SG ed ND; il rapporto delle quali è d'uguaglianza, nel supposto, che quelle superficie si pareggino, siccome nel proposto problema si cerca. Un tal problema adunque riducesi a ritrovare la ragione de' parametri principali dell'Ellisse ALR, e dell'Iperbole ZAY, affinchè le normali di loro, corrispondenti ad una comune ascissa, costantemente si adeguino.

§. 5. Una tal riduzione avendola comunicata al Signor Abate D. Felice Giannattasio, gli fu agevol cosa il menar a capo lo snodamento del Problema coll'Algebra de' Finiti nel seguente modo.

Ritengansi gli stessi simboli del §. 3; ed oltre a ciò si chiami p il semiparametro principale dell'Ellisse ALR, ed v quello dell'Iperbole ZAY: sarà $cc = ap$, e $bb = av$: e l'equazioni caratteristiche di queste curve saranno le seguenti

$$zz = aa - axx : p \quad , \text{ed}$$

$$yy = aa + axx : v .$$

E poichè, come da' Conici appare, sta GM : x : : a : p, sarà GM$^2 = aaxx : pp$; e quindi GS^2, ch'è uguale ad MS^2 + GM^2, sarà uguale ad $aa + xx(aa - ap) : pp$. Ed essendo per le proprietà dell'Iperbole ZAY, il semiparametro principale di lei v al semiasse a, come

KH

KH a KC, o come CM ad MD, per la similitudine de' triangoli HKN, NMD: cioè a dire $v : a :: x :$ MD; sarà $MD^2 = aaxx : vv$. Dunque il quadrato della normale ND, che pareggia i quadrati delle NM, ed MD, sarà uguale ad $aa + xx(aa+av) : vv$. Per la qual cosa dovendo essere $ND^2 = SG^2$, sarà pure

$$aa + xx(aa - ap) : pp = aa + xx(aa+av) : vv;$$

ove togliendo aa, e dividendo il resto per axx, avrassi $(a-p)vv = (a+v)pp$: ed ordinando quest'equazione per determinarvi l'ignota v, sarà

$$vv - \frac{ppv}{a-p} = \frac{app}{a-p}$$

E risolvendola otterrassi

$$v = \frac{ap}{a-p} \qquad \text{M}$$

E poichè v pareggia $bb : a$, e p adegua $cc : a$; sostituendo nell' equazione M i rapportati valori di v, e di p, e fattevi le dovute riduzioni, sarà $bb = aacc : (aa - cc)$; e quindi, com' erasi trovato dal Padre Fontana.

$$b = \frac{ac}{\sqrt{(aa-cc)}}$$

Ma di un tal problema, cui il primo si è ridotto, eccone la nostra

Analisi Geometrica.

§. 6. I. Si unisca il fuoco F dell' Ellisse ALR coll' estremo E del suo asse minore LT, e vi si cali dal centro C la perpendicolare

lare

lare CQ; sarà, come abbiamo da' Conici, FL uguale ad AC semiasse maggiore di tal curva, ed LQ uguale al suo semiparametro principale.

II. Suppongasi di già ritrovato il semiparametro principale dell' Iperbole ZAY, e questo sia Lb, che pongasi per diritto colla FL: ed intendendosi descritto sopra Fb un semicerchio, il cui perimetro seghi in e la retta Le, perpendicolare alla FLb; sarà chiaro esser la retta Le, ch'è media proporzionale tra FL, ed Lb, il semiasse conjugato della stessa Iperbole. Si uniscano poi le rette Fe, eb.

III. Finalmente ordinata all' asse minore dell' Ellisse la MS, e prolungatala insino alla sottoposta Iperbole; si conducano le normali ad esse curve ne' punti S, ed N, le quali sieno SG, ND: e si prolunghi questa finchè incontri in H l' asse RA, cui si ordini la NK.

IV. Ciò premesso; essendo simili i due triangoli DMN, NKH, sta NM, ovvero CK a KH, come DM ad NK; onde questa ragione al par di quella sarà uguale (a) alla ragione di FL ad Lb; cioè sarà $DM : NK :: FL : Lb$, e $DM^2 : NK^2 :: FL^2 : Lb^2$. Ma per la natura dell'Iperbole ZAY è poi $CK^2 - CA^2 : NK^2 :: Le^2 : Lb^2$. Dunque sarà per la 24. El. V. $DN^2 - CA^2 : NK^2 :: Fe^2 : Lb^2$.

V. Similmente nell' Ellisse ALR sta la sunnormale GM all'ascissa MC, come il semiasse LF al suo semiparametro LQ (b): dunque sarà $GM^2 : MC^2 :: LF^2 : LQ^2$. Ed è poi per la natura di tal curva $SO^2 : ROA :: CL^2 : LF^2$. Dunque per equalità perturbata avrassi $GM^2 : ROA :: CL^2 : LQ^2$. Or aggiugnendo al quadrato di GM, ed al rettangolo ROA gli uguali quadrati di MS, e di CO; le loro somme, che sono GS^2, e CA^2, debbon differir tra loro, quanto ne differiscono GM^2, ed ROA. Laonde essendosi conchiuso esse-

(a) Prop. 14. lib. III. Sez. Con.

(b) Gli assi conjugati sono inversamente come i loro parametri.

sere GM^2: ROA : : CL^2 : LQ^2 sarà dividendo, $GS^2 - CA^2$: ROA : : CQ^2 : LQ^2 ; ed essendosi puranche detto esserne ROA ad SO^2, come FL^2 ad LC^2, o come FC^2 a CQ^2, sarà per equalità perturbata $GS^2 - CA^2$: SO^2 : : FC^2 : LQ^2.

VI. Or dovendo essere DN $=$ GS, sarà pure $DN^2 - CA^2$ uguale a $GS^2 - CA^2$, e quindi uguali le due ragioni di $DN^2 - CA^2$ ad NK^2, e di $GS^2 - CA^2$ ad SO^2 : e prendendo quelle ragioni, che si son dimostrate (n.IV., e V.) pareggiar queste, sarà Fe^2 : Lb^2 : : CF^2 : LQ^2. Laonde, se facciasi il rettangolo QFv uguale al quadrato di QL, ed in luogo de' quadrati di FC, e di Fe si sostituiscano i rettangoli LFQ, *b*FL loro uguali; sarà *b*FL ad Lb^2, come il rettangolo di QF in FL all' altro di QF in Fv, cioè come FL ad Fv, o come il rettangolo di *b*F in FL a quello di *b*F in Fv: e sarà quindi il quadrato di L*b* uguale al rettangolo di *b*F in Fv. E per la reciprocanza delle basi, e delle altezze di questi due rettangoli uguali, avrassi *b*F : *b*L : : *b*L : Fv, e dividendo LF : *b*L : : *b*L — Fv : Fv. Vale a dire le due rette *b*L, e *b*L — Fv son reciproche alle date LF, vF, ed han per differenza la data vF.

§. 7. Scol. L' essersi il proposto problema ridotto a ritrovar due linee rette reciproche a due altre date, ed aventi una data differenza, ne dichiara esser egli piano, e con tal riduzione risoluto: ma una saggia speculazione su quelle rette, che ho condotte ne' numeri I. e II., gliene reca un' elegante, ed effettiva soluzione, ch' è la seguente.

Si protragga la retta Le, finchè incontri in un punto E l' asse transverso dell' Iperbole, e distesa per E la retta EB parallela all' asse minore dell' Ellisse, si prolunghi la FL fintantochè la incontri: sarà la retta LB il semiparametro principale dell' Iperbole ZAY. Imperciocchè per la simiglianza de' triangoli FEB, FCL, essendo BF : FL : : EF : FC; e per esser simili gli altri FEL, FCQ sta FL : FQ : :

FQ :: EF : FC; sarà dunque BF : FL :: FL : FQ; e quindi BF. FQ :: BF^2 : FL^2; ma la prima di queste ragioni pareggia quella del rettangolo di BF in Fv all'altro di FQ in Fv; ed è poi BF^2 : FL^2 :: EB^2 : CL^2, ovvero come BL^2 : LQ^2, per la similitudine de' triangoli BLE, LQC; sarà dunque BF . Fv : FQ . Fv :: BL^2 : LQ^2 : e quindi siccome si è supposto FQ . Fv = LQ^2, così sarà BF . Fv = BL^2; e con ciò BL il cercato semiparametro.

PROP. I. TEOR.

§. 8. *Se descrivasi l'Iperbole conica ZAY, la quale abbia per asse transverso la retta RA asse maggiore della data Ellisse RLA, e per semiasse conjugato la quarta proporzionale ritrovata in ordine all' eccentricità CF, ed a' semiassi conjugati CA, CL di quest' Ellisse; tal Iperbole sarà la generatrice della Cilindroide proposta.*

Dimos. Si unisca la retta FL, cui si elevi dal punto L la perpendicolare LE, che incontri in E l'asse maggiore dell'Ellisse RLA. Dal punto E si erga EB perpendicolare ad AE, prolungandola sinchè incontri in un punto B la retta FL prodotta ancor essa quanto conviensi. Sarà la retta FL uguale al semiasse maggiore dell' Ellisse; e l' altra LE uguaglierà il semiasse coniugato dell' Iperbole ZAY: imperciocchè cotesta retta LE trovasi quarta proporzionale in ordine alle tre rette FC, CL, FL, qual per ipotesi debb' essere tal semiasse. E sarà poi LB, ch' è terza proporzionale dopo FL, ed LE, il semiparametro principale della stessa Iperbole. Finalmente per un qualunque punto M dell' asse minore dell' Ellisse AIR gli si conduca l'ordinata MS, la qual si protragga, finchè incontri l' Iperbole in N: ed ordinata all'asse transverso di lei la NK,

si

si adattino le normali SG, HND all'Ellisse, ed all'Iperbole ne' punti S, ed N.

Ciò premesso; per la simiglianza de' triangoli DMN, NKH, la retta MN, o la sua uguale CK, sta alla sunnormale KH, come DM ad NK: onde questa ragione al par di quella sarà uguale alla ragione di FL ad LB: cioè a dire sarà DM : NK :: FL : LB, e $DM^2 : NK^2 :: FL^2 : LB^2$. Ma per la natura dell'Iperbole ZAY è pure $CK^2 - CA^2 : NK^2 :: LE^2 : LB^2$; dunque per la 24. El. V. avrassi $DN^2 - CA^2 : NK^2 :: FE^2 : LB^2$; ove ben si comprende, ch' essendo DM^2 con CK^2, o con MN^2 uguale a DN^2, esser debba la somma di DM^2 e di $CK^2 - CA^2$ uguale a $DN^2 - CA^2$.

Similmente nell'Ellisse ALR la sunnormale GM sta all'ascissa CM, come CA^2, o FL^2 a CL^2, cioè come LF ad LQ, e con ciò $GM^2 : CM^2 :: LF^2 : QL^2$. Ma per la natura di tal curva è pure $SO^2 : CA^2 - CO^2 :: CL^2 : FL^2$; dunque sarà perturbando $GM^2 : CA^2 - CO^2 :: CL^2 : QL^2$, e dividendo $GS^2 - CA^2 : CA^2 - CO^2 :: CQ^2 : QL^2$, imperciocchè aggiugnendo a GM^2, ed a $CA^2 - CO^2$ le uguali MS^2, e CO^2, le loro somme, che sono GS^2, e CA^2 debbon differir tanto, quanto GM^2, ed $AC^2 - CO^2$. Ed essendo poi, come si è dimostrato, $CA^2 - CO^2$ ad SO^2, come FL^2 ad LC^2, o come FC^2 a CQ^2, sarà di nuovo per uguaglianza perturbata $GS^2 - CA^2 : SO^2 :: FC^2 : QL^2$.

Or dunque essendo FC^2 ad EF^2, come CL^2 ad EB^2, o come QL^2 ad LB^2, sarà permutando $FC^2 : QL^2 :: FE^2 : LB^2$: e saran quindi uguali le ragioni, che loro si son mostrate uguali ne' due §§. precedenti, cioè le ragioni di $GS^2 - CA^2 : SO^2$, e di $DN^2 - CA^2 : NK^2$; ma i conseguenti di esse son uguali; quindi l'è ancora $GS^2 - CA^2$ uguale a $DN^2 - CA^2$, e con ciò GS^2 pareggia DN^2; e quindi GS è uguale a DN.

§. 9. *Scol.* Se si descriva l'Iperbole AQX, che abbia per asse transverso l'asse maggiore dell'Ellisse ALR, e per semiasse conjugato *Tav. IV. Fig. 4.*

 la

la CE terza proporzionale in ordine all' eccentricità CF, ed al semiasse minore CL dell' Ellisse; la detta Iperbole sarà il luogo delle normali dell' Ellisse rapportata all' asse minore: cioè a dire ogni normale SG dell' Ellisse ALR uguaglierà la corrispondente ordinata MQ dell' Iperbole AQX. (Vedi i Conici illustrati dal nostro Giannattasio Prop. 54. lib. III., e le Divinazioni del Viviani su di Aristéo seniore). Dunque l'altra Iperbole ANZ sarà la generatrice della Cilindroìde proposta, sol che si dimostri esser ogni normale di lei ND uguale all' ordinata MQ dell' Iperbole AQX. Lo che agevolmente si conchiude nella guisa che segue.

Altra dimostrazione.

§. 10. I. Dal punto R si elevi RK perpendicolare ad RA, e su di essa si tagli la RH uguale a CE semiasse coniugato dell'Iperbole AQX; e vi si taglino altresì le due RI, RK respettivamente uguali ad LE semiasse coniugato dell' altra Iperbole ANZ, e ad LB semiparametro di essa. Si congiungano le rette CH, CI, CK, e si protragga l' ordinata QM, finchè le incontri in o, r, v.

II. E poichè i triangoli CMv, CRH sono simili, sarà CM ad Mv, come RH, o la sua uguale CE ad RG, e sarà quindi $CM^2 : Mv^2 :: CE^2 : CR^2$. Dunque per la 12. El. V. avremo $CM^2 + CE^2$ ad $Mv^2 + CR^2$, come CE^2 a CR^2, cioè per la natura dell' Iperbole AQX, come $CM^2 + CE^2$ ad MQ^2. Onde sarà MQ^2 uguale ad $Mv^2 + CR^2$. Similmente dalla somiglianza de' triangoli CMr, CRI rilevasi MN^2 uguale ad $Mr^2 + CR^2$: dunque aggiugnendovi gli uguali quadrati di MD, e di Mo, avrassi DN^2 uguale ad $Mr^2 + CR^2 + Mo^2$.

III. Ciò premesso, per la similitudine de' medesimi triangoli CMv, CRH, essendosi detto esser CM : Mv :: CE : CR, sarà il rettangolo di CM in CR uguale all' altro di Mv in CE. E per la simi-

similitudine de' triangoli CMr, CMo agli altri CRI, CRK rispettivamente, dimostrandosi nello stesso modo essere i rettangoli di Ms in LE, e di Mo in LB uguali allo stesso rettangolo di CM in CR; saranno tra se uguali i tre rettangoli di Mv in CE, di Mr in LE, e di Mo in LB.

IV. Or dall'uguaglianza de' rettangoli di Mr in LE, e di Mo in LB, dee stare $Mo : Mr :: LE : LB$, ed $Mo^2 : Mr^2 :: LE^2 : LB^2$ e componendo $Mo^2 + Mr^2 : Mr^2 :: EB^2 : LB^2$. E poi dall'uguaglianza de' due rettangoli di Mr in LE, e di Mv in CE, anche rilevasi $Mv^2 : Mr^2 :: LE^2 : CE^2$. Dunque siccome le due ragioni di EB^2 ad LB^2, e di LE^2 a CE^2 sono uguali fra loro pe' triangoli simili ELB, ECL, così dovrà stare $Mo^2 + Mr^2 : Mr^2 :: Mv^2 : Mr^2$; ed esser quindi $Mo^2 + Mr^2$ uguale ad Mv^2. Per la qual cosa aggiugnendovi CR^2, sarà $Mo^2 + Mr^2 + CR^2$ uguale ad $Mv^2 + CR^2$, cioè (n. II.) DN^2 uguale ad MQ^2, e DN uguale ad MQ. C. B. D.

PROP. II. PROBL.

§. 11. *Le due equazioni $yy = P + Qx + Rxx$, e $zz = p + qx + rxx$ appartengansi a due curve coniche poste fra loro in combinazione (a), si voglion determinare i rapporti delle grandezze P, Q, R alle altre p, q, r, affinchè le corrispondenti normali di queste due curve sien tra loro eguali.*

Soluz. Essendo $yy = P + Qx + Rxx$; sarà, differenziando quest'Equazione, $2ydy = Qdx + 2Rxdx$: e quindi $ydy : dx$, che rappresenta la

(a) Veggasi la Teoria delle construzioni geometriche dell'Equazioni cubiche, e biquadratiche.

la sunnormale (*a*) in questa curva, sarà $\frac{1}{2}Q+Rx$. Per la qual cosa aggiugendo il quadrato di questo binomio al trinomio $P+Qx+Rxx$, ch'è il quadrato della semiordinata y; la loro somma sarà il quadrato della normale, che nella prima di dette curve appartiensi all' ascissa x. Cioè a dire un tal quadrato sarà

$$P+\tfrac{1}{4}Q^2+(Q+QR)x+(R+RR)xx \qquad A$$

E così il quadrato della normale, che nell'altra curva corrisponde alla medesima ascissa x, dovrà essere

$$p+\tfrac{1}{4}q^2+(q+qr)x+(r+rr)xx \qquad B$$

E pareggiando i coefficienti de' termini analòghi di queste due espressioni A, e B, che per le condizioni del Problema vi deggion essere uguali, si avran le tre seguenti Equazioni di condizione, cioè

$$P+\tfrac{1}{4}Q^2=p+\tfrac{1}{4}q^2\,,\ Q+QR=q+qr\,,\ R+RR=r+rr. \qquad C$$

Ove supponendo date le p, q, r, si potran determinare le P, Q, R, che si richieggono.

§. 12. *Esempio*

Supponendo essere un' Ellisse la seconda delle due proposte curve, la cui Equazione all' asse secondario, e per le ascisse computatevi dal centro co' medesimi simboli quassù adoperati (5), *dee essere* $zz=aa-aaxx{:}cc$; *ritrovar l' Equazione dell' altra curva combinata con essa, sicchè sien tra se uguali le loro normali corrispondenti.*

Soluz. In tal caso dee esser, come l'è chiaro, $p=aa$, $q=o$; ed $r=-aa{:}cc$. Dunque le tre Equazioni C diverranno per la richiesta indagine

$$P+\tfrac{1}{4}Q^2=aa\,,\ Q+QR=o\,,\ RR+R=(a^4-a^2c^2){:}c^4$$

Ma

(*a*) Com' è noto dall' applicazione del Calcolo Differenziale alla Geometria.

Ma risolvendo la terza di esse, come se la R fosse ignota, rinviensi la detta grandezza $R = (aa - cc):cc$, imperocchè l'altro di lei valore $-aa:cc$ coincide con quello, che si è dato alla r. Dunque dee esservi la $Q = o$, altrimenti la seconda Equazione divisa per la Q darebbe la $R = -1$: lo che non può essere. Dunque nella prima Equazione avrassi $P = aa$. E sarà quindi $yy = aa + (aa - cc)xx:cc$ l'Equazione alla richiesta curva, ch'è la generatrice della Cilindroide.

§. 13. *Coroll.* Da queste cose può chiaramente rilevarsi, che oltre alla Cilindroide Wallisiana non siavi altro solido generato dalle curve coniche, talchè la superficie di esso sia continuamente uguale a quella dell'anzidetta Sferoide schiacciata, la qual vi s'intenda iscritta convenevolmente.

PROP. III. TEOR.

§. 14. *La superficie della Sferoide schiacciata RTAL è uguale a quel cerchio, che ha per raggio la media proporzionale tra l'asse maggiore RA della sua Ellisse generatrice, e tra l'arco parabolico TrL, che ha per vertice il punto medio dell'eccentricità di essa, e passa per gli estremi dell'asse minore TL.* Tav. IV. Fig. 3.

I. Intendasi praticata la costruzione delle proposizioni precedenti; e prodotte le ordinate SM, *sm*, finchè incontrino in P, ed in *p* l'arco parabolico TrL, si ordini la PI al suo asse *rc*, e vi si conduca in P la normale PZ. Ed essendo il rettangolo di FC in CE uguale ad LC^2, cui è puranche uguale il rettangolo della Cr nella 2IZ, che n'è il parametro principale, ovvero di CF in IZ; saranno perciò uguali i rettangoli di FC in CE, e di FC in IZ; e quindi CE adegua IZ.

II.

II. Con che essendosi dimostrato il rettangolo di FC in IZ uguale al quadrato di CL, o al rettangolo di FL in LQ, che gli è uguale, sarà FL : IZ : : CF : LQ ; ed $FL^2 : IZ^2 : : CF^2 : LQ^2$: ma sopra (a) si è conchiuso essere $SG^2 - FL^2 : SO^2 : : CF^2 : LQ^2$: dunque sarà (12.El.V.) $SG^2 : PZ^2 : : CF^2 : LQ^2$:(imperciocchè la somma di SO^2 ovvero di PI^2 e di IZ^2 è PZ^2): e quindi sarà SG : PZ : : CF : LQ. Or essendo FL : FC : : FC : FQ, ed FC : FQ : : CE : LQ, sarà FL : FC : : CE : LQ, e permutando, FL : CE : : FC : LQ; quindi da ciò che si è mostrato sarà SG : PZ : : FL : CE; e permutando, SG : FL : : PZ : CE : e sostituendo AC in luogo di FL, ed IZ in vece di CE, sarà SG : AC : : PZ : ZI, cioè come Pp a Pq; e sarà parimente la periferìa del raggio SG a quella del raggio AC, come Pp a Pq: e con ciò il prodotto Pp nella periferìa di AC è uguale all' altro di Pq nella periferìa di SG ; cioè è uguale alla superficie conica di Ss: laonde sarà l' intera superficie della Sferoide schiacciata uguale al rettangolo dell' arco parabolico TrL nella circonferenza di AC, o nella semicirconferenza del raggio AR. Or supponendosi esser DH media proporzionale tra l' arco parabolico TrL, ed AR, sarà TrL a DH, come la semicirconferenza del raggio DH a quella del raggio AR; e quindi il rettangolo di DH nella semicirconferenza del suo raggio, pareggia l' altro dell' arco parabolico TrL nella semicirconferenza di AR; cioè il circolo descritto col raggio DH uguaglierà la predetta superficie della Sferoide schiacciata. C. B. D.

OPU-

(a) §. 6. num. V.

OPUSCOLO VIII.

DI

VINCENZO FLAUTI.

Continuazione dello stesso argomento della Cilindroide.

§. 1. NEll' Istoria dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi per l'anno 1709 leggesi l' estratto di una Memoria del Signor Parent sulla Cilindroide Wallisiana, ove tra le altre cose vien rilevata un' insigne proprietà di un tal solido. Ed è „ che quando gli „ assi conjugati dell'Iperbole generatrice della Cilindroide abbiano un „ certo rapporto a quelli della sferoide schiacciata, la qual vi s' in„ tenda convenevolmente iscritta, le superficie di cotesti due solidi „ deggian essere continuamente tra se uguali, come son quelle per „ appunto della sfera e del cilindro circoscrittole (a). " Or questa verità, ch' è un estensione di quella, che il grande Archimede aveva dimostrato per la sfera e pel cilindro sono ormai 20 secoli, doveasi tor dall' obblio, e saggiamente illustrare. E quindi il sommo d' Alembert, dappoichè ebbe chiarite le nozioni di Conoide, e di Cilindroide ne' corrispondenti Art. dell' Enciclopedia, invitò i Geo-

(a) L' enunciazione, che ne ha recata il Sig. Forte a questa verità nel §. 2. del suo Opuscolo, mi sembra più precisa di questa, che ho rapportata colle stesse parole del d' Alembert.

i Geometri ad una tal ricerca, col dire. „ Noi lasciamo questo tra- „ vaglio a' nostri leggitori, i quali vi si potran valere del meto- „ do da noi proposto per la dimensione delle superficie delle Co- „ noidi. E ciò dipende da' luoghi delle normali delle loro gene- „ ratrici.

§. 2. Dunque un Geometra che voleva prestarsi a siffatti inviti, per una di queste due vie aveasi lodevolmente a condurre. Se imprendeva a divinarvi la dimostrazione del Parent, senza più fare; doveva trarla da' Principj di Geometria ch'erano noti ne' tempi di cotesto Scrittore, e poi produrla con nitore geometrico, o almen ristretta ne' simboli dell'Algebra. E s'ei con voli analitici voleva in questo ameno argomento spaziarsi, lo che sarebbegli tornato a maggior gloria; doveva avvalersi del metodo inverso delle Tangenti, e poi costruire i generali analitici risultati, adattandoli alla Cilindroide Wallisiana. Or io che ho pensato d'occuparmi sul medesimo soggetto, non fo che segnar le diritte vie che mettono all'una cosa ed all'altra, cioè all'anzidetta Geometrica Divinazione, ed all'analitica soluzion generale del Problema. Ed eccone di ciò l'eseguimento.

§. 3. Il Sign. Viviani, che meritamente può chiamarsi l'Apollonio Italo, ha dimostrato nella sua divinazione in Aristeo Seniore, che il luogo delle normali di un' Ellisse rapportata all'asse minore, sia *il convesso di un' iperbole, che tien per asse principale l'asse maggiore della data Ellisse, il quale dee starne al suo parametro, come la differenza de' quadrati dell'asse maggiore de l'Ellisse, e del parametro del minore al quadrato del detto asse minore* (a). E quin-

(a) Questa proposizione è secondo la precisa idea del Viviani, come può vedersi nella Prop. 41 del 1 Lib. della sua Divinazione de' Luoghi Solidi di Aristeo Seniore: ma più giù ne sarà recata una riduzione, ch'è più semplice di essa.

quindi chiamando a il semjassē maggiore di tal Ellisse, c il semiasse minore, e con ciò $\frac{aa}{c}$ il semiparametro di questo, dovrà stare $\frac{aa(aa-cc)}{cc} : cc :: a : \frac{c^4}{a(aa-cc)}$,
e cotesto quarto proporzionale sarà il semiparametro principale di detta locale. E moltiplicandolo per a, e poi prendendone la radice del prodotto; sarà $\frac{cc}{\sqrt{(aa-cc)}}$ il semiasse conjugato di siffatta iperbole, come l'è noto da' Conici. Cioè a dire *un tal semiasse conjugato sarà terza proporzionale in ordine all' eccentricità ed al semiasse minore dell' Ellisse*.

§. 4. Inoltre il luogo delle normali nella parte convessa di un' iperbole, così soggiugne il medesimo Geometra, *l' è un' altra iperbole convessa, che ha il medesimo asse di quella, ed ha poi per parametro la terza proporzionale in ordine alla somma dell' asse maggiore e del parametro, ed al parametro della prima iperbole*. Sicchè chiamando a il semiasse principale della prima iperbole, b il suo semiasse conjugato, e quindi il suo semiparametro principale $\frac{bb}{a}$, sarà $\frac{b^4}{a(aa+bb)}$ il semiparametro principale della già detta locale. E così pure moltiplicando per a cotest' ultima espressione, e prendendone la radice di un tal prodotto, avrassi $\frac{bb}{\sqrt{(aa+bb)}}$, ch' è il valore del semiasse conjugato di tal locale. Ed ei *sarà terza proporzionale dopo l' eccentricità dell' iperbole proposta e 'l suo semiasse conjugato*. Le quali cose da' Conici son chiare, e dalle rapportate espressioni.

Intanto da questi due Principj eccone l'immediata risoluzione del proposto Problema.

PROP. I. PROBL.

§. 5. *Dati gli assi conjugati di una Sferoïde schiacciata, ritrovar quelli della Cilindroïde circoscrittale, talchè sieno continuamente uguali le loro superficie, come si è quassù divisato.* (2).

Sol. Si chiami a il semiasse maggiore della data Ellisse, c il semiasse minore, ed x sia il semiasse conjugato della generatrice della richiesta Cilindroïde, la quale deve avere per asse principale l'asse maggiore dell'Ellisse. Sarà $\frac{cc}{\sqrt{(aa-cc)}}$ il semiasse conjugato di quell' iperbole, ch' è il luogo delle normali dell' Ellisse riferita all' asse minore (3). E 'l semiasse conjugato dell' iperbole, ch' è il luogo delle normali della generatrice della Cilindroïde (4), sarà $\frac{xx}{\sqrt{(aa+xx)}}$.

Dunque dovendo per la condizion del Problema coincidere coteste locali, dovrà essere

$$\frac{cc}{\sqrt{(aa-cc)}} = \frac{xx}{\sqrt{(aa+xx)}}$$

E prendendo la radice reale, e positiva di quest' Equazione, che ben si vede esser biquadratica, e derivativa del secondo grado, avrassi

$$x = \frac{ac}{\sqrt{(aa-cc)}}$$

§. 5.

§. 6. *Cor. I.* Di quì si rileva che il *semiasse conjugato della generatrice della richiesta Cilindroide debba esser quarta proporzionale in ordine all'eccentricità della data Ellisse, ed a' di lei semiassi conjugati*. E ciò consente colle illazioni del P. Fontana, e del Signor Forte.

§. 7. *Cor. II.* E lo stesso risultato sarebbesi ottenuto colla guida delle due proporzioni del Viviani quassù esposte (*a*).

§. 8. *Scol.* La composizione geometrica, che potrebbe farsi a questo Problema col ricalcarne in ordine retrogrado l'algebrica di lui soluzione, riuscirebbe assai grave e tediosa a' leggitori. Quindi è, che ad evitar tai sconci, gioverà l'attenersi ad un insegnamento di nostra Scuola, qual si è quello di doverne in tal caso carpire una geometrica ricerca da qualche tratto della soluzione; il quale ne parrà più idoneo a tal uopo. Or l'Equazione sottoposta

$$\frac{xx}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{cc}{\sqrt{(aa-cc)}}$$

sembran a ciò conveniente; come quella, che si converte nel seguente geometrico Problema, di cui mi è riuscito dare una semplicissima costruzione.

PROP. II.

(*a*) Cioè colle proporzioni, che osservansi ne' principj de' §§. 3, 4.

PROP. II. PROBL.

Tav. IV. Fig. 4. §. 9. *Costruire un triangolo rettangolo, di cui un cateto sia la retta FL semiasse maggiore della data Ellisse, e l'altro cateto siavi medio proporzionale tra la sua ipotenusa e la data retta CE, ch'è terza proporzionale in ordine all' eccentricità, ed al semiasse minore di tal curva.*

Solut. Dal punto L si elevi la Le perpendicolare alla LF ed uguale alla data CE. Di poi si descriva sulla Le come diametro il cerchio VLe, e tirata per F la segante centrale FGV, si applichi la FP uguale alla FV. Il triangolo FLP sarà il richiesto.

Dim. Imperocchè togliendo dagli uguali quadrati delle FP, ed FV rispettivamente FL^2 ed VFN, che sono anche tra se uguali, vi rimarrà il quadrato della LP uguale al rettangolo di FV in VN, cioè di FP in Le.

§. 10. *Cor. I.* Sul semiasse maggiore FL della data Ellisse s'intenda costruito il triangolo FCL rettangolo in C, i cui cateti FC, e CL dinotino l'eccentricità, e 'l semiasse minore della data Ellisse rispettivamente, e le due rette FC, e PL si uniscano in E. Sarà la CE (terza proporzionale in ordine ad FC e CL) uguale ad VN, come erasi posta uguale alla Le.

§. 11. *Cor. II.* Ed essendo uguali i due rettangoli EFC ed VFN, poichè ciascuno di essi uguaglia LF^2, aggiungendo ad essi il quadrato di CO metà di CE, e l'altro di NG rispettivamente, sarà FG^2 uguale ad FO^2, e quindi FG uguale ad FO: e la FV, o sia la FP dovrà uguagliare la FE, e con ciò la LP l'altra LE.

§. 12. *Cor. III.* E sarà per la similitudine de' triangoli FCL, LCE, la FC alla FL, come la CL alla LE, o alla sua uguale PL. Onde potrà ridirsi ciò, che si è detto dal Sig. Forte Prop. I., che il

il semiasse conjugato della generatrice della Cilindroide sia quarta proporzionale in ordine all' eccentricità, ed a' semiassi conjugati dell' Ellisse data.

§. 13. *Cor. IV.* Finalmente *l' eccentricità di queste due curve son proporzionali a' quadrati de' loro semiassi conjugati, o a' loro parametri principali per aver amendue il medesimo asse.* E questa verità, che può trarsi dall' Equazione producitrice (8) del presente Problema, è stata egregiamente e con chiara Sintesi dal Professore Scorza dimostrata nel risolverne sinteticamente il divisato Problema della Cilindroide.

§. 14. *Scol.* Un de' nostri Geometri si è lasciato dire potersi concepir due Ellittoidi intorno ad un comune asse, e con tali parametri principali, che conducendovi nella interiore di esse una sezione circolare, questa vi poteva troncar da entrambe due uguali superficie insino al comun circolo dell' asse maggiore. Gli si è risposto ciò esser falso, e l'impossibilità di tal concetto potersi dimostrare dalla Prop. III. del Signor Forte, dal Problema analitico, che or saremo per recare, ed insin dalla riduzione praticata dall Ab. Giannattasio pag. 101, vers. 8. Ed invero supponendo esser x il semiparametro principale di cotesta Ellittoide interiore, dovrebbe essere secondo l' anzidetta riduzione $(a-p)xx=(a-x)pp$. Laonde risolvendo rispetto ad x questa quadratica Equazione avrebbesi la x uguale a p, o pure a $-ap:(a-p)$. Or il primo di questi due valori renderebbe l' Ellittoide interiore identica all'esteriore: e l' altro dandole un semiparametro negativo rende immaginario il semiasse conjugato, e quindi impossibile una tal Ellittoide interiore. In tal congiuntura si son fatte varie speculazioni sull' Equazioni algebriche di simil forma, e se n'è anche recata una semplicissima dimostrazione, che per la novità dell' orditura è ben di quì recarla. Cioè „ dall' indicata riduzione ricavansi uguali i seguenti fratti

„ xx:

„ $xx:(a-x)$, e $pp:(a-p)$. Sicchè chiamando V l'identico valor di „ ciascheduno di essi, e sciogliendo sì l'uno, che l'altro in pro- „ porzione avrassi $x:a-x::V:x$, e quindi $x:a::V:V+x$. E dimo- „ strando in simil guisa $a:p::V+p:V$, sarà per equalità perturbata „ $x:p::V+p:V+x$. Ma quì supponesi la x minore di p: dunque „ dovrà essere anche $V+p$ minore di $V+x$; e toltavi la V „ resterebbe p minore della x, ch'è una contradizione. Intanto per dare a queste mie ricerche maggior risalto, e renderle più grate ed importanti a' Geometri, io abbozzerò quì appresso il metodo diretto, che ad esse conduce, e che un nostro Geometra si è compiaciuto comunicarmi.

PROP. III. PROBL.

§. 15. *Abbozzare un Metodo Analitico diretto per l'indagine di cotesta Cilindroide Wallisiana, e di altri solidi similmente condizionati.*

Soluz. I. Il Problema della proposta Cilindroide dee risolversi col metodo inverso delle Tangenti, che quì più acconciamente potrà dirsi l'*Inverso delle Normali*. Ed ei ben tosto ci offre un'Equazione differenziale del 1. ordine, ed a due variabili, che con sagaci analitici ripieghi può rendersi omogenea, e cogli ovvj mezzi integrarsi. In tal maniera operando si rinverrà la seguente Equazione per quella generatrice della Cilindroide Wallisiana, cioè

$$cc\left(vv-aa-x\sqrt{(aa+hxx-vv)}\right)=\left(\frac{2aax-bbx}{aax+bb\sqrt{(aa+hxx-vv)}}-1\right)^{\frac{bb}{2aa-bb}}$$

F

Ove la c n'è un'arbitraria costante (*a*); la grandezza a disegna il

(*a*) Il semiasse minore della data Ellisse, che costantemente si è disegnato per c nelle precedenti Proposizioni, ora il dinoteremo per b, per non confonderlo colla costante somministrataci dall'integrazione, e che con quel simbolo suol esprimersi dagli Analisti.

il semiasse maggiore della data Ellisse; la b n'è il minore; e l'altra h dee pareggiare $(a^4-aabb):b^4$. Inoltre la variabile x dinota una qualunque ascissa computata dal centro di detta Ellisse in sul semiasse minore, ed v esprime la sua corrispondente semiordinata ortogonale nella curva, che si domanda.

II. E supponendovi la $c=o$, qual dee esser tal costante, affinchè la richiesta curva passi per un estremo dell'asse maggiore dell'Ellisse; l'Equazione F si contrarrà in un'altra assai semplice, ed identiforme a quella, che per diverse vie han ritrovata i due insigni Geometri il P. Gregorio Fontana, e 'l Sig. Forte, cioè a dire ella sarà

$$vv=aa+\frac{aa-bb}{bb}xx \qquad G$$

E se faremo $a=b$ nell' Equazione G, questa degenera nella $vv=aa$, o nella $v=a$, ch'è ad una retta parallela all'asse di rivoluzione di questi due solidi, e distante da esso per a. In tal caso l'Ellittoide diverrà una Sfera: la Cilindroide si cangerà in un Cilindro circoscrittole: e vi si vedrà campeggiare quel celebre Teorema Archimedeo sull'equalità delle loro superficie.

III. Che anzi cotesto risultato avrebbesi potuto ottenere senza punto separar le variabili in quell'Equazione differenziale omogenea, e senza nemmeno integrarla. Bastando a tal uopo il carpirne la sua soddisfacente Equazione: e ciò ottiensi, come l'è noto, col supporre la variabile x moltiplicata per un' ignota n pareggiare l'altra variabile di quell'Equazione omogenea. E per tal modo i due valori dell'ignota n ci daranno le due sottoposte Equazioni

$$vv=aa-\frac{aa}{bb}xx \quad ; \quad \text{ed} \quad vv=aa+\frac{aa-bb}{bb}xx$$

la prima delle quali appartiensi alla data Ellisse, e l'altra è per la generatrice della richiesta Cilindroide.

IV.

IV. E se la superficie del solido, che debba uguagliare quella della data Ellittoide, dovesse passare per un qualunque punto del di lei asse maggiore, l'Analista dovrà in tal caso valersi dell'Equazione F, e rivolger tutte le sue cure nel geometricamente costruirla. Dappoichè cotest' impresa, come tra' Geometri si conviene (*b*), è assai malagevole, per non vi si poter separare le variabili x, ed v.

V. Or il detto Geometra per poterne in ciò riuscire impegnasi a risolvere un Problema nuovo, ed importante, cioè a dire. Data l'Equazione $F(x,v)=f(x,v)+C$, ove le F, ed f disegnino due diverse funzioni delle x, ed v, sieno elle algebriche o trascendenti, costruirla geometricamente: cioè esibire una curva, che abbia per coordinate ortogonali le variabili x ed v, il rapporto delle quali sia definito dalla data Equazione.

VI. E volendosi estendere un tal metodo ad altre superficie di rivoluzione diverse dalla Sferoide schiacciata, ei ne prefigge le condizioni da poterne analiticamente ottener l'intento.

§. 16. *Scol.I.* I Problemi, che appartengonsi al metodo inverso delle Tangenti, offron sovente Equazioni differenziali di difficilissimo maneggio, e riducimento. Poichè, come costa dagli Elementi de' Calcoli sublimi, poche Equazioni differenziali, ed anche quelle del 1. ordine, ed a due variabili, si sanno convenevolmente integrare: e queste sono le *Separate*, le *Integrabili di per se stesse*, le *Omogenee*, le *Lineari*, e le *Riccaziane* (*c*). Ed anzi riuscendo di sa-

(*b*) Il Sig. La Croix, ed altri valentissimi Analisti soglion dire *un' Equazione differenziale non può costruirsi ordinariamente, che quando vi si separano le variabili*.

(*c*) Il Metodo de' Moltiplicatori sebbene di sua natura sia universale, e con ciò paja assai energico, pure non si è saputo finora applicare, che a coteste Equazioni solamente.

saperne integrare una di coteste Equazioni, le sue variabili x, ed y il più delle volte emergono con algebrico, o trascendente modo siffattamente tra lor legate, che manca l'arte da saper l'una dall'altra separare, e quindi da poter quell'integrale geometricamente costruire. Ed ecco due difficoltà ben gravi, che spesso insorgono in cotesti Problemi, a rimuover le quali interamente o in parte si è il nostro Geometra applicato giusta sua possa.

§. 18. *Scol. II.* L'acutissimo Giovanni Bernulli essendosi imbattuto a risolver Problema sì malagevole seppe in un altro più facile deviarne, qual n'è quello *di descrivere una curva intorno all'asse di un'altra data, sicchè ogni sua normale fosse uguale all'ordinata, che dal punto, ove tal normale incontra il comun asse, conducesi nella curva data*. Or egli in risolvendolo si valse delle primitive operazioni del Calcolo Differenziale. E Giacomo Bernulli, in ciò più saggio di suo germano, dimostrò esser sufficiente a tal indagine la Cartesiana Geometria. Ma io vi aggiungo, che cotesto nuovo Problema non sia risolvibile, che per poche curve date, o almeno per que' tratti di ciascuna di esse; ove le ordinate sien minori delle corrispondenti loro sunnormali. Poichè nella riduzione fatta da Giovanni Bernulli (a) in tal Problema rilevasi, che la sunnormale, e la normale della richiesta curva sieno respettivamente uguali alla sunnormale, ed all'ordinata della data curva. Onde il rapporto di queste due ultime grandezze dovrebb' esser ovunque di minor disuguaglianza, come l'è sempre quello delle due prime. Inoltre l'Autore di cotest' Opuscolo, di cui ne ho quì recato un abozzo, diè in luce nell'anno 1779 un elegante Problema sul metodo inverso delle Tangenti, ove l'Equazione differenzio-differenziale, che se ne trae, per essere stranamente inviluppata delle sue va-

(a) Vol. III. pag. 431.

variabili sembrava incapace di separazione, e d'integrarsi. Il celebre Platzmann un anno dopo disciolse un analogo Problema negli Atti Nuovi di Pietroburgo per l'anno 1780. E nelle geometriche costruzioni di questi due Problemi farò più cose utilmente osservare nell'esibirle.

GIU-

CONTINUAZIONE DELL' OPUSCOLO PRECEDENTE.

Esame delle varie Soluzioni del Problema della Cilindroide Wallisiana.

§. 1. SEguendo il sistema già da noi adottato, d'istituire, a vantaggio de' giovani, a' quali destiniamo questi nostri Opuscoli, un parallelo tra le diverse soluzioni di un problema, date da più Geometri, che vi si erano occupati: proporremo perciò in seguito delle ricerche di nostra Scuola sulla Cilindroide Wallisiana le seguenti riflessioni sulle diverse soluzioni, che finora n'esistono.

§. 2. Il P. Fontana ottimo Analista dell' alta Italia fu il primo ad illustrare cotesto geometrico argomento, che per poco men di un secolo era restato nel bujo. Ed ei seppe in tal rincontro dimostrarne quell' insigne proprietà della Cilindroide Wallisiana, che aveva meritata l'attenzione, e gl' impegni del Signor d'Alembert. Or sebbene i Geometri debban esser riconoscenti all'Analista Italiano di tutto ciò, ch' egli ha fatto; pure non direbbesi fuor di ragione, ch' ei in un tal lavoro non abbia serbato il decoro dell' Analisi moderna, nè secondato i desiderj del d'Alembert; poichè nel prender col Calcolo Integrale l' indeterminata quadratura (a) della superficie Ellittoidale, e quella della corrispondente nella Cilindroide (le quali accortamente di poi pareggia), non fa che eseguire una calcolazione puramente empirica, e sì ristretta, che niuno mai può adattarla a quistioni affini, e nè anche in seguito

* può

(a) §. 3. Opusc. VII.

può saggiare se, oltre alla detta Cilindroide, siavi altro solido soddisfacente al quesito (*b*). Or se egli voleasi contenere tra limiti sì ristretti, perchè non raccolse coteste verità da' soli Conici coll' evoluzione delle geometriche ragioni, o coll' analisi de' finiti (*c*), come la ragion di metodo esigea, e come i nostri Geometri han saputo nitidamente eseguire?

§. 3. Il nostro Signor Forte, abbandonando il cammino dell' Analisi sublime seguito dal Fontana, da accurato Geometra, compose, giovine ancora (*d*), queste geometriche speculazioni, ed altre di simil conio, che più appresso si daranno in luce. La riduzione da lui praticata (*e*) nel Problema della Cilindroide Wallisiana, è il germe della soluzione analitica, che il mio dotto Collega Giannattasio trasse per vie assai semplici; e di quell' altra sintetica, di che egli stesso ne distese l' analisi geometrica, ed una gemina geometrica composizione (*f*). Inoltre col maneggio dell' Equazioni Identiche ei promosse siffatte ricerche. Supplì pure una geometrica dimostrazione al celebre Teorema Ugeniano sulla dimensione della superficie d' una Sferoide schiacciata. E queste cose, che fan più pregevole l' argomento, sono altre pruove del valore geometrico del Signor Forte, cui una crudele malattia, che da più anni il tra-

(*b*) Veggasi la Formola F. §. 15. Opusc. VIII.

(*c*) Si riscontrino le Soluzioni addotte negli Opusc. VII, ed VIII.

(*d*) L'Opuscolo del Signor Forte, che riproducesi in questa Raccolta, fu dato in luce la prima volta nell'anno 1797.

(*e*) §. 4 Opusc. VII.

(*f*) Cotest' Analisi geometrica, di cui principalmente dee tenersi conto in tal lavoro, vedesi eseguita dal Signor Forte con sagacia, ed eleganza. Nè altri creda esservi una profusion di ragioni; poichè queste sono in minor numero di quelle, che l'accuratissimo Viviani ha impiegate nel rilevar le indicate locali.

travaglia, lo ha con pubblico duolo alle Geometriche Scienze involato.

§. 4. Anch' io, ripigliando l'Opuscolo del Signor Forte per riprodurlo in questa collezione, mi posi a scandagliar questo argomento giusta le intenzioni del sommo d'Alembert, e parmi di esser riuscito nell'attignervi un'analitica soluzione, che sembra intuitiva, e che mette ad un semplicissimo analitico risultato. E volendola poi tradurre in Sintesi rigorosa, qual conviensi per eleganza di un tal lavoro, ne ho congegnata la geometrica composizione in quattro semplicissime parole. Ma questo Problema della Cilindroide doveasi risolvere generalmente, e col Metodo Inverso delle Tangenti; ed a tale oggetto ne ho abbozzato in fine del mio Opusculo il Metodo, che mi è stato comunicato da un nostro valentissimo Analista. Ed in tal congiuntura non ho tralasciato di far rilevare alcuni altri Principj di nuove indagini.

§. 5. Nè debbo quì anche tralasciar di avvertire, che discorrendo di questo mio lavoro coll'altro mio collega D. Giuseppe Scorza persona, che ad un estrema moderazione accoppia un merito non ordinario nelle Scienze geometriche, riuscì a costui il rilevare dall'uguaglianza delle rispettive normali nella generatrice della Cilindroide, ed in quella della Sferoide schiacciata, cioè dall'uguaglianza de' rettangoli delle corrispondenti sunnormali nelle rispettive somme di esse, e delle sottangenti, che per la proposta condizione debbano esser *l'eccentricità di queste due curve proporzionali a' quadrati de' loro semiassi conjugati*. Della qual verità eccone la dimostrazione che egli mi ha comunicata.

PROP.

PROP. TEOREMA.

Se l' iperbole conica ABR *si rapporti allo stesso asse maggiore* AQ *dell' Ellisse* ANQ , *e le di loro eccentricità* CF , C*f* *sieno proporzionali a' rispettivi parametri* AR , QP ; *queste curve dovranno avere uguali normali corrispondenti ad una medesima ascissa dal centro presa nell' asse minore ; e quindi detta iperbole sarà la generatrice della Cilindroide proposta .*

Dim. Si tiri ovunque la BG parallela alla AQ , e che seghi le proposte curve in B , ed in F , e per questi punti si tirino all'Iperbole , ed all'Ellisse rispettivamente le tangenti BK , ed FH , e le normali BD , ed FI , le quali incontrino l' asse secondario ne' punti K , H , E , ed I ; finalmente dal punto B si ordini BM all' asse QA : sarà EG : GC :: EB : BD , o come CM : MD . Ma a cagion dell' Iperbole ABR , stà CM : MD : : QA : AR (*a*) . Dunque sarà ancora EG : GC : : QA : AR . Ed è poi per l' Ellisse ANQ , GC : GI : QP : QA (*b*). Laonde sarà *ex aequo perturbando* EG : GI : : QP : AR . Inoltre KC stà a CH , come il rettangolo KCG al rettangolo HCG ; ma questi rettangoli ne pareggiano respettivamente i quadrati di CS , e di CN , che sono i semiassi secondarj dell' Iperbole ABR , e dell' Ellisse ANQ . Dunque sarà ancora KC : CH :: $CS^2 : CN^2$, ovvero come i parametri AR , QP delle anzidette curve per aver esse lo stesso asse maggiore AQ . Or essendo EG : GC : : QA : AR , o come $QC^2 : CS^2$, sarà componendo EC : CG : : $CF^2 : CS^2$. Similmente stà CG : CI : : $CN^2 : Cf^2$. Quindi sarà EC : CI : : $(CF^2 : CS^2)(CN^2 : Cf^2)$; e scambiando i conseguenti delle due ragioni componenti , starà pure EC :

(*a*) Prop. 12. Lib. III. Sez. Con. di Giann.

(*b*) Prop. 15. Lib. II. Sez. Con. di Giann.

$EC : CI :: (CF^2 : Cf^2)(CN^2 : CS^2)$. Mà si è supposto che l'eccentricità sono come i parametri, ossia come $CS^2 : CN^2$. Dunque la ragione di EC a CI sarà composta dalla diretta de' quadrati de' parametri, e dall'inversa degli stessi parametri; e perciò la ragione di EC a CI corrisponderà a quella de' semplici parametri AR, e QP. Laonde essendosi dimostrato, che stia $AR : QP :: KC : CH$; sarà ancora $EC : CI :: KC : CH$, e per la 12. El. V. $EK : HI :: KC : CH$, o come $IG : GH$; e quindi il rettangolo KEG sarà uguale al rettangolo HIG, e con ciò $BE^2 = FI^2$, e $BE = FI$. Adunque per le cose precedenti l'Iperbole ABR sarà la generatrice della Cilindroide proposta. C. B. D.

§. 6. Intanto a questi scientifici pareri farà nobil corona il congetturare quì da ultimo, come mai il Signor Parent si fosse indotto a rinvenir la Cilidroìde di superficie uguale a quella di una Sferoìde schiacciata, ed a tesserne quella dimostrazione, ch'ei forse volle supprimere a bella posta, o che un accidente poi la disperse. Ne' luoghi solidi del Viviani (g), eccone la mia congettura, vengon recate due Iperboli, di cui una è il luogo delle normali di un'Ellisse allungata, e l'altra di un'Iperbole convessa: queste cose potevansi conoscere dal Parent; bastava dunque, che il Geometra Francese vi concepisse coincidenti coteste due Iperboli locali per conchiuderne l'uguaglianza delle superficie di que' due solidi. E colla face della Geometria, o dell'Analisi de' finiti ei poteva incontanente rilevare il rapporto degli assi conjugati delle generatrici de' solidi proposti.

§. 8.

(g) Il Signor Parent produsse quel suo Opuscolo nell'anno 1697: ed i Luoghi Solidi del Viviani furono stampati la prima volta nell'anno 1673, e non già nel 1701, come crede il Montucla. Lo che dalla stessa Epigrafe di detto Libro vien indicato. *Elaboratum anno 1646. Impressum Florentiæ ab Hippolito Navesi anno 1673. Addendis auctum, & in lucem prolatum anno 1701.*

§. 8. Finalmente l'indagine della Cilindroìde Wallisiana condizionata nel proposto modo parmi potersi eseguire per un de' tre metòdi seguenti. Cioè *per la coincidenza de' Luoghi delle normali delle generatrici di esso Solido, e della Sferoide schiacciata, che vi s'iscrive: per l'uguaglianza delle corrispondenti normali nelle dette curve*: e finalmente *per lo Metodo Inverso delle Tangenti*. Or il primo di questi tre Metodi, che parmi servile di sua natura, non può avere altro merito, che quello dell'eleganza dell'eseguimento. Il secondo Metodo è poi giudizioso: e 'l terzo dovrà aversi per assai ingegnoso.

OPU-

OPUSCOLO IX.

Estratto dall' Arte Euristica di un nostro Geometra: Ed ha per oggetto i Problemi de Inclinationibus *universalizzati, che si posson dire delle Applicazioni.*

§. I. Più classi di geometrici Problemi han tal natura, che non può loro recarsi alcuna soluzione algebrica, o geometrica, se non vi s' innesti qualche *ramo del Luogo Risoluto*, qual si proponeva nelle Greche Scuole, o qual da noi si è di nuovi Principj fregiato. Di questo genere son que' Problemi di Sito, e Posizione, che un nostro Geometra recò alla Reale Accademia di Napoli, son oramai cinque lustri. E di tal natura son anche i Problemi di certe *posizionali* Inscrizioni nel I. Opuscolo esibiti; quelli delle Tazioni sferiche, che producemmo nell' anno scorso: e tante altre famiglie di Problemi, che più giù daremo in luce convenevolmente (*a*). Ed in tutte queste cose farà alta sorpresa il vedere, come assai Problemi, e di difficil tempra in virtù di pochi semplicissimi Porismi n' emergano risoluti all' istante.

§. 2.

(*a*) Un Giovinetto di nostra Scuola, il di cui nome sarà indicato all' apparir de' suoi lavori, ha impreso ad isciorre una nuova famiglia di Problemi geometrici, derivandone da un sol Porisma le soluzioni loro.

§. 2. Ma oltre a' Porismi, anche i Luoghi alle Linee, ed alle Superficie, di che intendiamo quì specialmente ragionare, ad elegantemente risolvere i Problemi valgon sovente (*b*). Ed anzi con tal mezzo una congerie di Problemi Solidi, Ipersolidi, ed anche Transcendenti, nulla perdendo di lor natura, risolvonsi a guisa de' Problemi Piani col solo condurvi rette, e descrivervi de' cerchi. E quindi se alcune parti del Luogo Risoluto sono equivalenti a' Metodi moderni, potendosi con questi, o con quelle sciorre i Problemi di Geometria con ugual successo; i Porismi Geometrici, e i divisati Luoghi ne son poi prevalenti. Da poichè co' Metodi Algebrici o affatto non rinviensi alcuna soluzione in ciascun di tali Problemi, o la si offre involta in spaventevoli ed impraticabili risultati (*c*).

§. 3.

(*b*) Per buona fortuna i disprezzatori della Sintesi non han mai conosciuto il Luogo Risoluto delle Greche Scuole. E tanto è parlare ad essi di quest' Analisi Geometrica, delle sue parti, e delle loro destinazioni nell' inventare, quanto sarebbe il raccontare ad un Elementista di Geometria il Calcolo delle Variazioni, e l' utile applicazione, che di esso suol farsi alla Scienza della Natura.

(*c*) A' Dati de' geometrici Problemi può darsi una divisione più adeguata, e più comoda di quella di Euclide, con dirne che alcuni di essi sien di *Rapporto, altri di Sito, ed altri poi di Genesi o genetici*, comprendendo nella prima di queste classi i tre primi generi de' Dati Euclidei. Or ne' Problemi, che contengono solamente Dati di rapporto l' Analisi Algebrica è mirabilmente attiva. Pe' Dati di Sito ella è inoperosa, e dee prenderne come in prestanza dalla Geometria alcuni principj per potervi riuscire. E finalmente i Dati Generici son la materia de' più sublimi lavori degli Analisti nel doversi dalla genesi di coteste geometriche grandezze i valori di esse rilevare. In fatti qual cosa è più facile quanto il concepir la sezione di un Solido, il moto di un istrumento, il movimento reptorio del-

§. 3. Ma può, dir taluno, la Geometria Analitica a due, o tre Coordinate, di cui tanto ne van fastosi certi moderni Analisti, non sarà mai potente a proccurarne l'eleganti, o l'effettive soluzioni a que' Problemi? Questa Scienza, per quel che pare dovergli-si rispondere, non è che il Metodo Cartesiano depurato di Sintesi, per mezzo del quale i Dati, ed i Quesiti di ciascun Geometrico Problema riduconsi in valori analitici, rapportandoli con un' analisi simmetrica a due, o tre arbitrarie Direttrici, e dal maneggio di tali grandezze, cui fan di guida le condizioni ivi proposte, ottiensi l'Equazion finale del Problema. Or sebbene tutto ciò sia lodevole, ed utilmente talor s'impieghi da' lodati Analisti; pure non sappiamo intendere, come mai nel nostro caso rimossa la Sintesi, ch'è la luce de' Siti, si possa felicemente uscir d'intrigo. Noi altrove farem parola del genuino valore di cotesta novella Geometria. Ed or ne basta con pruove di fatto la verità di nostre asserzioni assodare.

§. 4. E per poterne in ciò proceder con ordine di Scienza, ed assai chiaramente, noi abbiam pensato, senza mica restrignerne la vastità del subietto, di limitarci a que' soli Problemi che concernono certe applicazioni di rette tra più linee date di posizione,

 qua-

delle curve, il trattorio, quello di evoluzione, di rotamento, ec. ma non è poi malagevole il voler caratterizzare le curve nate in tal guisa, o il volerle quadrare, o rettificare? Quindi parmi, che il Grande Apollonio fin dalla tomba di Perga facciasi a rampognarci col dire. *Voi, che tanto orgoglio pe' vostri Metodi menate, sovvengavi, ch' io proposi la genesi del cono Scaleno, son già 20 secoli, e da questo le curve coniche derivai. Ma qual metodo di comoda approssimazione avete mai prodotto per quadrar la superficie di quel Solido, o per poterne queste curve rettificare?* Che anzi dovrà confessarsi, che gli ultimi tentativi, che or si facciano sulle formole Integrali, sien quelli di poterle ridurre, se fia possibile, agli archi delle Ellissi, o delle Iperboli.

qualunque sien queste. Ed un tal argomento sarà più amplo, e più utile di quello, che dicevasi *de Inclinationibus* da' Geometri dell' antichità rimota. Nel risolver poi cotesti Problemi, che son germi fecondi di tanti altri, noi ci resteremo alle loro Analisi geometriche: dispensandoci dal recarne le composizioni, i diversi casi possibili, qualche caso impossibile, che talor vi si annida, e che suol esserne dinotato. Poichè un Geometra dimostratore potrà di leggieri supplirvi tali cose, ed un Giovane avrà occasione di sospignersi da queste geometriche lacune co' suoi conati.

PROP. I. PROBL.

§. 5. *Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva algebrica, o trascendente, applicare tra questa curva, ed un lato di quell'angolo una retta data di grandezza, e parallela all'altro lato.*

Tav. IV. Fig. 5. *Soluz.* Sia EDG la curva data, ABC il dato angolo rettilineo, e tra BA, ch'è un suo lato, e la detta curva EDG debbasi adattare una retta uguale alla data M, e parallela all'altro lato BC del medesimo angolo.

Dal vertice B del dato angolo, e sul detto lato BC si tronchi la parte BN uguale alla data M, e da N poi si conduca la ND parallela all'altro lato BA di esso angolo. Se tal retta incontri la proposta curva, il Problema sarà solubile. La incontri dunque in D, e si compia dalle BN, ed ND il parallelogrammo ABND. Dico esser la retta AD quella, che si domanda.

La verità di quest' asserzione ben si comprende dal proposto artifizio: ed ognuno potrà supplirvi, che vi possano esser più punti soddisfacenti al quesito; cioè che debba esser *n* il più gran numero di

di cotesti punti, se n sia il grado dell' Equazione della curva EDG, quando ella sia algebrica.

§. 6. *Coroll.* Se la retta da doversi applicare tra la curva EDG, e la retta AB debba esser data di grandezza, e debba poi passarne per lo dato punto P; i punti soddisfacenti al quesito saran marcati nella data curva EDG da una Concoide, che abbia per assintoto la data AB, per polo il punto P, e per intervallo la data retta M. E ciò vuol assolutamente praticarsi, quando la data curva EDG sia transcendente.

§. 7. *Scol. I.* E dovendosi adattare tra la curva EDG, e la retta AB un'altra retta uguale ad M, ed in tal modo, che congiunto un dato punto Q coll'estremo D dell'applicata che si richiede, l'angolo ADQ sia dato, di qual ripiego ci serviremo? Nell' illustrazione di questi Problemi sarà proposta una curva *Concoiforme*, che vi segnerà nella data EDG i punti soddisfacenti al quesito.

§. 8. *Scol. II.* Quando diremo esser data *una qualunque curva* senza porvi altro aggiunto, dovrà intendersi, che questa possa esserne algebrica di qualunque Ordine, o comunque transcendente: limitandoci ordinariamente alle *transcendenze circolari*, *alle logaritmiche*, ed *alle esponenziali*, che son le più conosciute dagli Analisti. E taluno dovrà supplirvi con suo pensiero, ch'ella sia anche data *di Specie*, *e di Grandezza*.

PROP. II. PROBL.

§. 9. *Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva, applicare tra questa linea, ed i lati di quell'angolo una retta parallela ad un'altra data di sito, sicchè ne resti divisa in una ragion data.*

Tav. IV. Fig. 6. *Soluz.* Sia ABC il dato angolo rettilineo: EDG la curva data: *ac* la retta data di posizione, cui debbasi condurre una parallela, che vi resti divisa in una ragion data dalle tre linee BA, BC, ed EDG.

La retta *ac* prodotta, sinchè incontri i lati di quell'angolo, dividasi nel punto *d* in quella ragion data: e la retta *Bd*, che unisce i punti *B*, e *d*, si protragga insino alla data curva EDG. Quella retta dovrà segnare in questa curva, se il Problema non sia impossibile, i punti ad esso soddisfacenti.

Imperocchè conducendo per un di cotesti punti D la retta ADC parallela alla data *ac*, ben si comprende dover essere AD : DC :: *ad* : *dc*.

§. 10. *Coroll. I.* Al presente Problema immantinente riducesi quest'altro. *Applicare tra le proposte linee* BA, BC, *ed* EDG *una retta* AC, *la qual vi resti divisa in una data ragione, ed ella in una data ragione ancor ne divida i lati dell'angolo dato* ABC, *e verso del dilui vertice*. Imperocchè la seconda di queste due condizioni ne dichiara dover essere la richiesta AC parallela ad una retta data di sito: onde un tal Problema rimettesi a quello della presente Proposizione.

§. 11. *Coroll. II.* E se la retta da applicarsi fra quelle linee date debba troncar da' lati dell'angolo dato le due parti AM, CN in una data ragione, e verso de' punti M, ed N dati in essi lati, e le parti AD e DC di cotal retta vi debban essere in una data ragione; il punto D, come lo ha dimostrato il Sommo Newton, do-

dovrà allogarsi in una retta data di posizione. Dunque gl' incontri di questa retta colla data curva EDG saranno i punti soddisfacenti al Problema. E per ciascuno di essi converrà condurre una retta, la qual vi resti divisa dalle altre due BA, BC nella ragion proposta. E ciò n' è di facile ottenimento.

§. 12. *Coroll. III. Vuol disporsi infra le dette linee* BA, CB, *ed* EDG *la retta* AC, *che vi resti divisa in una data ragione, e vi tronchi il triangolo* ABC *dato di grandezza*. In tal caso la seconda di queste due (a) condizioni ne indica doversi il punto D appartenere ad un' Iperbole di una data potenza, ed i di cui assintoti esser deggian le due rette BA, BC. Dunque, se D sia un degl' incontri di quest' Iperbole colla data curva EDG, da un tal punto si dovrà condurre la retta ADC, talchè le sue parti AD, e DC sieno in una ragion data. Lo che facilmente può eseguirsi.

§. 13. *Coroll. IV.* Propongasi di adattare fra queste tre linee BA, BC, ed EDG una retta come AC parallela alla data *ac*, talchè il rettangolo ACD sia dato. In quest' altro caso sarà anche dato il rettangolo di DC in CB per esser dato di specie il triangolo ABC. Dunque condotta per lo punto B la BQ parallela alla *ac*, e descritta un' Iperbole cogli assintoti BQ, BC, che abbia una potenza uguale al rettangolo di DC in CB, una tal curva dovrà segnare nella data EDG i punti soddisfacenti al Problema.

§. 14.

(a) Cotesta proprietà dell' Iperbole, che forse non è a' Giovani familiare, può facilmente dimostrarsi nel seguente modo. Dal punto D si conduca la DO parallela alla BC, e congiungasi BD. Ed essendo il triangolo ABC all' altro ABD, come AC ad AD, e 'l triangolo ABD al triangolo DOB, come AB a BO o come AC a DC, sarà per egualità ordinata il triangolo ABC al triangolo DOB, come AC^2 ad AD in DC. Ma qui supponesi data la seconda di queste due ragioni, ed è anche dato l' antecedente della prima. Dunque sarà dato il triangolo DOB, e quindi il rettangolo di DO in OB per esservi dato l' angolo DOB. Dunque il punto D appartiensi ad un' Iperbole, che ha per assintoti le BN, e BA, e per potenza un

§. 14. *Coroll. V.* Finalmente dal dato punto P vuol condursi fra le dette linee BA, BC, ed EDG la retta PA, sicchè le sue parti, che framezzan quelle linee, cioè le AD, e DC, sieno in una ragion data. In tal caso, come lo ha dimostrato il Sommo Newton nella sua Aritmetica Universale, il punto D appartiensi ad una data Iperbole. Dunque le intersezioni di questa linea colla data EDG vi segneranno i punti soddisfacenti al quesito, dovendosi congiungere ciascuno di essi con quel dato punto P con una retta.

§. 15. *Scol.* Ismaele Bulialdo, che fu il primo a rischiarare i Porismi Euclidei, quivi volle risolvere il seguente Problema *di condurre un' ordinata in un semicerchio, la qual vi restasse divisa in una data ragione dal diametro, dalla semicirconferenza, e da una corda condottavi per un estremo del diametro sud-tto.* Or chi non vede esser questo Problema assai più ristretto di quello, che contiensi nella presente Proposizione. E si vedrà poi con maraviglia, ch' ei lo disciolse per una via men semplice della nostra. Intanto più conseguenze, o più Problemi si potrebbon trarre dall' anzidetta Proposizione, li quali si ometteranno volentieri per poterne un altro recare sopra un soggetto affine, che una più artificiosa analisi richiede.

PROP. III.

r. [illegible]adrato quanto il dato rettangolo di DO in OB. Finalmente (per chiarire l'ultima parte di questo Corollario) essendo data la ragione di AC ad AD, sarà anche data la sua uguale di CB a DO. Ma è data la DO: dunque sarà data la CB, dal cui estremo C dovrà condursi al punto D la CD, che sarà la retta addimandata.

PROP. III. PROBL.

§. 16. *Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva condurre da un punto di questa due rette date su i lati di quell' angolo, talchè esse vi facciano angoli dati colla detta curva, o co' lati di quell' angolo.*

Soluz. Part. I. Sia ABC l' angolo dato, EDG la curva data di posizione con esso: e suppongansi esser DA, DC le rette richieste, che nel primo caso, oltre ad esser date di grandezza, vi debban benanche formare i due angoli dati CDE, ed ADG colla curva in D, o colla sua tangente QDH condottale per D. Per ciò ottenere si unisca la retta AC: ed essendo dato l'angolo ADC complemento a due retti degli angoli dati ADQ, CDH, sarà dato di specie, e di grandezza il triangolo ADC. Dunque sarà data la sua base AC, e l'angolo CAL. E facendo al punto B della CB l' angolo CBL uguale al detto CAL, sarà data di posizione la BL. Ed oltre a ciò unito il punto C coll'altro L, ove tal retta ne incontri la DA, pe' quattro punti C,A,B,L potrà passarne un cerchio, essendo uguali gli angoli CAL,CBL: e sarà dato l' angolo ACL, come complemento a due retti dell' angolo dato ABL. Dunque sarà dato di Specie, e di Grandezza il triangolo ACL, che ha per base la data AC, e dove son puranche dati gli angoli ACL, e CAL ad essa adjacenti: onde vi dovrà esser dato il lato AL, e la rimanente LD. Or essendo data la retta AL sottesa del dato angolo ABL, il luogo del punto D dee esser un' Ellisse data di sito, e di grandezza. Dunque l' intersezione di questa curva coll'altra EDG, che n' è data, dovrà segnarvi i punti soddisfacenti al Problema. *Tav. IV. Fig. 7.*

Part. II. Suppongasi esser dati gli angoli DCB, DAB, che forman le date incidenti DC, DA co' lati del dato angolo ABC. E poi-

poichè nel triangolo ABO son dati per supposizione i due angoli DAB, ABO, ne sarà dato il terzo, cioè l'angolo AOB, o il suo uguale COD. Ma è anche dato l'angolo DCO. Dunque vi sarà dato il terzo CDA. E la presente indagine si ridurrà a quella del caso precedente.

§. 17. *Coroll. I.* Di quì comprendesi chiaramente, come un triangolo dato di specie, e di grandezza potrebbesi adattare fra due rette, ed una qualunque curva data di posizione, sicchè gli angoli di quella figura cadano su queste linee respettivamente. Ed un tal Problema è assai più generale di quell'altro, che il Sommo Newton disciolse ne' Princip. Matem. Filos. Nat. Lemm. 26.

§. 18. *Coroll. II.* Inoltre da' Principj euristici, che impieganst nel presente Problema, si potrà risolvere un altro Problema Newtoniano più generalizzato (*a*). Cioè date di posizione due rette, ed una qualunque curva applicare fra queste tre linee una retta, sicchè le sue parti intercette sien date di grandezza. E la medesima Analisi basterebbe a risolverne il Porisma III. de' Probl. di *Sito* (*b*).

PROP. IV

(a) Probl. 22. Aritm. Univers.

(b) Vedi Vol. I. Acc. Nap.

PROP. IV. TEOR.

§. 19. *Se diasi di posizione l' angolo* NLM, *e 'l punto* C; *da cui conducasi una qualunque segante* CP *a' lati di detto angolo, e da' punti* P, *ed* R *delle sezioni si tirino le rette* PA, *ed* RB *a' dati punti* A, *e* B *posti a diritto col punto* C; *io dico, che le due inflesse* AP, BR *convergan sempre in una retta data di posizione.* Tav. V. Fig. 1.

Il punto C *per brevità di dire si chiamerà Polo di quell' angolo; e la retta* AB *di lui direttrice.*

Dimostraz. Dal punto B conducasi la BD parallela all' inflessa AP: e poi dal punto Q, ove unisconsi amendue le inflesse, si meni la EQF parallela alla direttrice AB, incontrandone in E, ed F i lati del dato angolo: e questi in H, e G ne seghino la detta direttrice. Sarà, pe' triangoli simili CBD, CAP, CB : CA : : BD : AP.

Ciò posto la ragione di BD ad AP componesi da quelle di BD a PQ, e di PQ ad AP, come l' è noto. E la prima di queste componenti l' è quanto quella di BR ad RQ pe' triangoli simili BRD, PRQ, o quanto la di lei uguale di BG a QF per la similitudine degli altri due triangoli RBG, RQF. Dunque sarà BD : PQ : : BG : QF. Inoltre la seconda di dette componenti, cioè la ragione di PQ ad AP, l'è pure uguale a quest' altra di QE ad AH a cagion de' triangoli simili PHA, PEQ. Dunque sarà per lo §. 1 la ragione di CB a CA composta dalle due di BG a QF, e di QE ad AH, cioè scambiando i conseguenti di queste due altre componenti, sarà CB : CA : : (BG : AH X QE : QF).

Il perchè essendo data la ragione di CB a CA, e l' altra di BG ad AH, per esserne dati i loro termini, ne dovrà esser benanche data

l'altra ragion componente; cioè quella di QE a QF: e 'l punto Q dovrassi allogare in una retta data di posizione, che dee passare per lo vertice L dell'angolo dato.

§. 20. *Coroll.* Discostandosi all'infinito il Polo C da ciascun de' due punti dati A, e B, nel qual caso l'intersetta PR divien parallela alla direttrice AB, diverrà d'uguaglianza la ragione di CB a CA; e dovrà quindi risultarne QE: QF:: AH: BG. Onde in una più facil maniera potrà rinvenirsi in questo caso la locale LQ del concorso delle inflesse.

PROP. V. PROBL.

§. 21. *Dati di posizione un angolo, due punti, ed una qualunque curva, infletter da que' due punti a questa curva due rette, sicchè la retta, che unisce i concorsi delle due inflesse co' lati dell' angolo dato, sia parallela alla Direttrice, o con essa converga ad un punto dato.*

Soluz. I punti dati sieno A, e B, NLM sia l'angolo dato, TQS quella qualunque curva, e vogliansi infletter le due AQ, BQ ad essa; talchè la PR, ch' è tra le sezioni delle inflesse co' lati di quell'angolo, sia parallela alla direttrice AB, o convenga con essa nel dato punto C. Per ciò ottenere sia la retta LQ (19) la locale de' concorsi di coteste inflesse: ed una tal retta ne incontri la data curva TQS in uno, o più punti (altrimenti sarebbe impossibile un tal Problema). Io dico, che ciascun di questi punti debba esser soddisfacente al Quesito. E ciò dal Teorema precedente ben si conosce.

§. 22. *Scol.* Taluno potrà escogitare varj sistemi d'inflessioni di rette, e poi specularne colla luce della Geometria, o dell' Ana-

nalisi i Luoghi delle unioni di coteste inflesse. E queste cose potranno essere i materiali di leggiadrissimi Problemi, quanto agevoli, e grati a' Geometri, altrettanto tormentosi agli Analisti. Tra gli antichi Pappo Alessandrino, e tra' moderni Roberto Simpson nel rilevare alcuni Porismi di Euclide ne han segnate le tracce. Noi nella II. Parte ne daremo certi analitici avviamenti. Anche alcuni de' nostri Giovanetti vi han sensatamente travagliato (a). Ed ora conviene addurne un analogo Problema per vie-più chiarire un tal Soggetto.

PROP. VI.

(a) Due giovinetti di nostra Scuola versatissimi ne' Metodi Analitici, e Geometrici, han travagliato su questo argomento con accuratezza. Uno di questi ci ha dato una breve dimostrazione del 1. caso del presente Problema, cioè quando la PR, ch'è fra le sezioni delle inflesse co' lati del dato angolo, debba esser parallela alla direttrice AB. Cioè „ Si unisca l' ignoto punto Q col vertice „ L del dato angolo MNL, e tal retta si distenda insino alla direttrice. Saran „ le due ragioni di MG ad NG, e di AG a BG uguali fra loro, come uguali „ alla medesima ragione di PH ad RH. Onde per l' egualità di quelle due ragioni sarà il rettangolo MGB uguale all' altro AGN. Dunque descrivendo due „ semicerchi sulle MB, ed AN, e da una stessa parte, ed abbassata sulla MN „ la perpendicolare dal punto, ov' essi si seghino, questa dovrà segnarne l' igno„ to punto G. *Tav. V. Fig. 1.*

PROP. VI. PROBL.

§. 23. *Dato di posizione un punto, una Sezione Conica, ed un' altra qualunque curva, condurre da quel punto nella prima di queste curve due seganti, sicchè le congiungenti delle loro sezioni convergano in un punto dell' altra curva; ed oltre a ciò ne sia dato un angolo dell' emergente quadrilineo.*

Tav. V. Fig. 3. *Soluz.* Il dato punto sia A, CFED la proposta sezione conica, e BT l' altra curva data. Dal punto A conducansi le due tangenti alla sezione conica CFED, e sia LB la retta fra contatti, la quale ne seghi in B la curva BT. Sulla retta AB si formi un segmento di cerchio capiente l' angolo dato, o il suo conseguente, secondochè il detto angolo debba uguagliare l' angolo D, che rivolge l' apertura alla retta AB, (e lo stesso dicasi del suo opposto CFE nel Quadrilineo CFED) o vi debba uguagliare qualunque degli altri due rimanenti. E supposto, che cotesto segmento incontri in D la data sezione conica, vi si conducan le rette AD, BD, si unisca l'altra AE, ed in fin si congiunga la CF. Questa retta dovrà convenire colle due DB, LB nel medesimo punto B, come costa dai conici. E ne resterà in tal guisa risoluto il Problema.

PROP. VII.

PROP. VII. PROBL.

§. 24. *Date di posizione due qualunque curve, applicare tra' perimetri di esse una retta uguale ad una retta data di grandezza, e parallela ad un' altra data di posizione.*

Soluz. Tra le curve date di sito ANB, QSD vuol applicarsi una retta quanto la data R, e parallela all'altra CD data di posizione. Per ciò ottenere la retta AC dinoti l'asse della curva ANB, e condotta da un qualunque A di tal retta la Aa parallela alla CD, ed uguale alla data R, si meni per *a* la retta *ao* parallela al detto asse. E poi d'intorno ad *ac* intendasi descritta la curva *anb* identica alla data ANB, e similmente posta, sicchè le ordinate NM, ed *nm*, che in esse corrispondono alle uguali ascisse AM, *am*, non solamente sieno uguali, ma vi sieno benanche per diritto (*b*). Inoltre da un punto *n*, ove segansi le curve QSD, *anb*, (lo che dee assolutamente verificarsi, se tal problema sia possibile), si conduca la nN parallela alla CD: dico esser questa la retta addimandata. *Tav. V. Fig. 4.*

Dim. Imperocchè essendo uguali, come ora si è detto, le due *nm*, ed NM, aggiuntavi la *m*N di comune, sarà l'intercetta nN uguale alla mM, cioè ad aA, o alla data R. Ma è anche la me-

de-

(b) Quì potremo immaginarci, che la curva ANB si porti nel sito *anb* con moto a se parallelo, talchè il punto A cammini per *Aa* conducendovi la AC colla medesima inclinazione ad *Aa*. Questo Principio, che dall'inventore fu chiamato *di Transposizione rettilinea, o angolare*, e che fu da lui proposto nell' anno 1787 all' Accademia di Napoli, è stato benanche nell' arte Euristica annunziato. E molte di queste geometriche ricerche han ricevuto da un tal Principio energia. Ved. Vol. I. Acc. Nap. pag. 165.

desima *n*N parallela alla Cd data di posizione: dunque si è soddisfatto alle condizioni del problema.

PROP. VIII. PROB. II.

§. 25. *Dato di posizione un punto, una retta, ed una qualunque curva, applicare per quel punto tra queste linee una retta, sicchè le sue parti, che restano tra il detto punto, e ciascuna delle linee date, sieno in una data ragione, o vi comprendano un rettangolo dato.*

Tav. V. Fig. 5 *Soluz.* Part. I. Il punto N, la retta AC, e la curva qualunque DFE sien date di posizione, e vogliasi per N condurre tra le dette linee una retta, come la MNF, sicchè sieno le NM, ed NF nella data ragione di *m* ad *n*.

Dal punto N si abbassi la NB perpendicolare alla data AC, e protrattala verso la curva OFE, sinchè stia BN : NG : : *m* : *n*, si tiri per G la GF parallela alla data AC: e poi da ciascun punto F, ove tal parallela incontri la detta curva (lo che dee aver luogo, se il Problema sia possibile), si tiri al dato punto N la FNM. Sarà, pe' triangoli simili NBM, NGF, MN : NF : : BN : NG : : *m* : *n*.

Part. II. Si prolunghi la detta NB insino al punto Q, talchè il rettangolo BNQ uguagli il dato rettagolo, che qui dinotiamo per *aa*. E poi sulla NQ, come diametro, si descriva il cerchio QFN, che dovrà in qualche punto F incontrar la data curva DFE, se sia risolvibile un tal Problema. E finalmente da F conducasi per N la retta FNM, ed insino alla data retta AC. Sarà il rettangolo FNM uguale ad *aa*.

Imperocchè congiunta la QF, dovranno essere equiangoli, e cuin-

quindi simili i due triangoli QFN, NBM. Onde dovendo esserne QN : NF : : NM : NB, sarà il rettangolo FNM uguale a QNB, cioè ad aa.

PROP. IX. PROBL.

§. 26. *Dato di posizione un punto, un cerchio, ed una qualunque curva, tirare da quel punto una segante su queste linee, sicchè coteste incidenti sieno in una data ragione, o contengano un rettangolo dato.*

Soluz. Part. I. P sia il punto dato, BQF il dato cerchio, ed ARG quella qualunque curva; e da P vuol condursi una segante PQ, talchè le incidenti PQ, PR sieno come m ad n. *Tav. V. Fig. 6.*

Si unisca il centro C del dato cerchio col punto P: e divisa la PC in S, sicchè stia PC : PS : : m : n, si prenda la d quarta proporzionale in ordine alle m, n, ed al raggio di esso cerchio: e poi col centro S intervallo d si descriva un cerchio, che dovrà intersecare la data curva ARQ ne' punti soddisfacenti al Problema, s'ei sia solubile (c).

Dim. Sia R un di cotesti punti, ed unita la SR, si meni da C la CQ parallela alla SR, e si congiunga la PQ. Questa retta dovrà pas-

(c) Se il dato punto P sia l'intersezione della data curva ARG col cerchio BPQ, potrà recarsi quest' altra soluzion al Problema. „ Conducasi per P una qualun- „ que corda PG in detto cerchio, e prodottala in H, sicchè stia PG:PH : : m : n, „ si descriva sulla PH il segmento circolare PRH simile all'altro PQG, che in- „ tersecherà in un qualche punto R la curva ARG. Si unisca la RP, e si pro- „ lunghi insino al cerchio: sarà questa la retta cercata. Imperocchè, condotte le „ due rette RH e QG, ben si vede essesne equiangoli, e quindi simili i due „ triangoli PQG, PRH. Dunque sarà PQ : PR : : PG : PH : : m : n. *Tav. V. Fig. 7.*

passare per R. Conciossiachè se la PQ incontrasse la SR in un altro punto r, sarebbe per la 4. El. VI. CP : PS : : CQ : Sr : ed essendo per costruzione CP : PS : : CQ : SR, sarebbe Sr uguale ad SR, ch' è un assurdo. Dunque la PQ dovrà passare per lo punto R, e starà PQ : PR : : PC : PS : : m : n.

Part. II. Se il rettangolo RPQ debba esser dato, ei dovrà serbare una data ragione al rettangolo BPQ, ch' è dato per la natura del cerchio. Dunque esprimasi per r : t cotesta ragion data : sarà r : t : : PR . PQ : PB . PQ : : PR : PB. E 'l presente caso ridurrassi al precedente.

PROP. X. PROBL.

§. 27. *Dati di posizione un punto, un cerchio, ed una qualunque curva, condurre da quel punto due incidenti su queste curve, talchè esse comprendano un angolo dato, e sieno direttamente, o reciprocamente proporzionali a due rette date.*

Tav. V. Fig. 6. *Soluz. Part. I.* Dal dato punto P si voglian condurre sul circolo bqf, e sulla curva qualunque ARG le due incidenti Pq, e PR, che comprendano un angolo uguale al dato V, e sieno nella ragion data di m ad n. Suppongansi esser Pq, PR le rette addimandate: ed ecco l' Analisi geometrica del Problema.

Si unisca il centro c del dato cerchio col punto P, e poi si faccia l' angolo cPC uguale al dato V, CP uguale a cP, e col centro C intervallo cq si descriva il cerchio BQF, che sarà dato di posizione rispetto al punto P, ed alla curva ARG. Sicchè tirando dal punto P nel cerchio BQF l' incidente PQ uguale all' altra Pq, quella dovrà restarne adattata sulla PR. Imperocchè congiunta la

CQ

CQ i due triangoli CPQ, cPq per la 8. El. 1. avranno uguali gli angoli CPQ, cPq; onde aggiungendo ad essi di comune l'angolo QPc, dovrà risultarne l'angolo CPc uguale all'altro QPq. Ma il primo di questi due angoli è uguale al dato V, cui si è supposto uguale l'angolo RPq. Dunque sarà l'angolo QPq uguale all'angolo RPq; la PR sarà coincidente colla PQ: e la presente indagine si ridurrà a quella del I. Caso del Problema precedente.

Lo stesso intendasi per la II. Parte di un tal Problema.

§. 26. *Scol.* Questo Problema, ch'è un de' più facili tra quanti ne abbiam quì raccolti, e che anche da' Luoghi Piani di Apollonio poteva ricever pronto risolvimento, è assai celebre fra noi, per aver convalidata la prevalenza de' nostri Metodi a quelli della Geometria Analitica a due Coordinate. Da poichè un Professore dell' Alta Italia, ed allievo, com'ei cel diceva, de'sommi Analisti d'Oltramonti (*f*), si occupò con infelicissimo successo, son' oramai quattro

 anni,

(*f*) Cotesto Professore straniero essendo capitato in Napoli si fece a morder gratuitamente i Matematici della Capitale, e 'l greco geometrizzare; e sì fieramente tempestò fra noi, che scosse finanche D. Giuseppe Scorza giovane modesto, e saggio, perchè l'orgoglio di lui reprimesse. Or questo giovane avendo dottamente con quel Geometra favellato sul valore de' Metodi recenti, e sul loro uso convenevole, gli propose per pruova definitiva de' suoi detti la prima parte di questo Problema, ch'è un de'più facili di nostra Raccolta. Ma il credereste mai! Il Geometra straniero si ritenne al solo caso, che la seconda delle curve date fosse algebrica; e dopo alcuni giorni presentò al suo avversario le primizie dell'analitica soluzion del Problema guidata colla Geometria analitica a due Coordinate: confessando sinceramente, che ne abbisognava un grosso volume per distenderla; e che non avea alcun mezzo a riuscirne, se la seconda curva fosse trascendente. Intanto la soluzione direttagli da D. Giuseppe Scorza fu eseguita in amendue i casi con pochi versi di Sintesi, e per le nostre vie. E noi vi aggiungiamo, che

la

anni, a risolverlo con quella Scienza. Ma lasciando cotesta narrazione, che altrove sarà distesa fedelmente, noi avvertiamo i Leggitori, che per le seguenti ragioni abbiamo ricusato di usar que' Luoghi in queste risoluzioni. Prima perchè la nostra Analisi Geometrica ci è sembrata averne un cammino assai breve. Dipoi perchè l'è nostro disegno di recar delle algebriche Equazioni, affin di dimostrare in pochi giri di Analisi cotesti Luoghi di Apollonio, ed altri più rilevanti. E finalmente col nostro Principio di *Trasferimento* noi sogliamo scortar molto le dimostrazioni geometriche de' detti Luoghi. Onde il rapportarli sarebbe stato un superfluo lavoro.

PROP. XI. TEOR.

§. 27. *Se da un punto* P *preso fuori la curva* RAN, *qualunque ella siasi, vi si conduca un' incidente* PN, *la quale si divida in* n *in una ragion data; cotesto punto* n *dovrà allogarsi nell'altra curva* ran *simile alla proposta* RAN.

E se le due PN, *e* Pn *debban esser reciproche a due rette date; il punto* n *della divisione dell' incidente* PO *si dovrà ritrovare in una curva dissimile alla proposta* RAN.

Tav. V. Fig. 8. *Dimostraz. Part. I.* Dal punto P si conduca la PC, come ne piace, che però sia una comoda direttrice della proposta curva RAN. Onde chiamando v, e z le due qualunque Coordinate ortogonali PM ed MN di essa, l'Equazione di tal curva, s'ella sia algebrica, potrà generalmente esprimersi per

$a+bn$

la soluzione voluminosa del Geometra straniero poteva ridursi ad un decimo di un verso, come si vedrà nelle dilucidazioni, cioè alla costruzione dell'Equ. $X=Y$ ove le X, e Y sien funzioni algebriche dell'ignota x.

$$a+bv+cz+dvz+evv+fzz \; \ldots + Uz^n=0 \qquad A$$

Ed abbassando dal corrispondente punto n la nm perpendicolare alla PC, si ponga $Pm=x$, ed $mn=y$, e poi si dinoti per $h:1$ la costante ragione di PN : Pn, o la sua uguale di PM : Pm. E poichè sta MN : mn : : PN : Pn : : PM : Pm, sarà $h:1::z:y$, ed $h:1::v:x$. Vale a dire dovrà esserne $z=hy$, ed $v=hx$. Sicchè sostituendo nell' Equazione A cotesti valori delle z, ed v, e fattevi le debite riduzioni con porvi benanche $a:h=\alpha$, ella si cangerà in quest'altra

$$\alpha+bx+cy+dhxy+ehxx+fhyy \ldots +Uh^{n-1}.y^n=0, \qquad B$$

Che ben si comprende esser simile ad A, non che del medesimo di lei grado.

E se mai la data curva RAN sia transcendente, e la sua Equazione per le Coordinate ortogonali PM, ed MN esprimasi per $f(v,z)=0$; quella della curva nar dovrà dinotarsi per $f(hx,hy)=0$. E tanto in quel caso, che in questo s' intenderà esser simili le due curve RAN, ed ran.

Part. II. Che se il rettangolo di PN in Pn debba esser dato, che dinoteremo per KK, colle proposte variabili ci potrem guidare nel seguente modo a rinvenir l' Equazione della curva nar. Cioè a dire essendo $Pn=\sqrt{(xx+yy)}$, e quindi $PN=KK:\sqrt{(xx+yy)}$; sarà la ragione di Pn a PN uguale a quella di $xx+yy$ a KK. Ma pe' triangoli simili PMN, Pmn sta PM:Pm: : PN:Pn, ed MN:mn: : PN:Pn. Dunque sarà $v:x::KK:xx+yy$, e $z:y::KK:xx+yy$: cioè a dire sarà $v=KKx:(xx+yy)$, e $z=KKy:(xx+yy)$. Dunque, sostituendo nell' Equazione A questi valori delle v, e z, ne verrà la seguente Equazione

$$a+\frac{bK^2x}{xx+yy}+\frac{cK^2y}{xx+yy}+\frac{dK^4xy}{(xx+yy)^2}\ldots\ldots+\frac{UK^{2n}y^n}{(xx+xx)^n}=0, \qquad C$$

la quale si riduce a quest' altra

$$a(xx+yy)^n+KK(bx+cy)(xx+yy)^{n-1}\ldots\ldots+UK^{2n}y^n=0 \qquad D$$

Ove

Ove ben si comprende esser l'Equazione D di doppio grado dell' altra A, e potersi da quella inversamente rilevar quest'altra, con sostituire in D la grandezza v in luogo di $KKx:(xx+yy)$, e l'altra z invece di $KKy:(xx+yy)$. E, se la curva NAR sia transcendente, e la sua Equazione si dinoti per $f(v,z)=o$; quella della curva *nar* ne sarà anche transcendente, e verrà dissimile alla precedente con sostituirvi i recati valori delle v, e z.

§. 28. *Coroll. I.* La curva *nar*, che derivasi dalla proposta linea NAR col prenderne in ciascuna incidente PN la parte P*n* direttamente, o reciprocamente proporzionale all'anzidetta incidente, può dirsi *la derivata della linea NAR per diretta, o per reciproca divisione*. Ed una tal derivata sarà algebrica, se tal ne sia la proposta linea NAR (*a*). Quindi è, che dinotando per m il grado della derivata, dovrà esser, come l'è noto dalla Geometria Sublime, $\frac{1}{2}(mm+3m)$ il numero de' punti, pe' quali dee passare tal derivata per averne una determinata posizione (*b*). E ne sarà data la sua posizione e la natura, se diasi cotesto numero de' punti, e la sua caratteristica Equazione.

§. 29. *Coroll. II.* Una tal derivata può concepirsi esistente nel sito natio *nar*, o nell'altro $n'a'r'$, ch'ella abbiasi acquistato col girarne angolarmente intorno al punto P, finchè la PC abbiavi descritto un dato angolo ϕ. E tanto in quel sito, che in quest'altro, la potrem concepire generata per assegnazion di punti.

§. 30.

(a) Come rilevasi dalle addotte Equazioni.

(b) Il binomio $\frac{1}{2}(mm+3m)$ ben si comprende, che sia un numero intero, quando m sia pari. Ma essendone impari, ecco la dimostrazione. La forma generale di un numero impari è $2K+1$. Dunque quel binomio con porvisi $2K+1$ per m diviene $\frac{1}{2}(2K+1)(2K+4)=(2K+1)(K+2)$. E quest'ultima espressione è chiaramente un numero intero.

§. 30. *Coroll. III.* Se una tal derivata sia algebrica, o ch'ella n'esista nel sito natio *nar*, o nell'altro *n'a'r'* di trasferimento, può talora con moto organico descriversi comodamente. E sarà bene su tal proposito osservare tutto quel, che saggiamente sulla descrizione organica delle curve (c) vien rapportato da' sommi Geometri il Cavalier Newton, Colin Mac-Laurin, e Braikenridge.

§. 31. *Coroll. IV.* E se la derivata per division diretta, o ch' ella sia algebrica, o trascendente, vogliasi descrivere organicamente, basterà a tal oggetto il solo Fantografo adoperarne.

§. 32. *Coroll. V.* La derivata di una curva algebrica per la divisione diretta delle incidenti è il più semplice caso del trasmutamento di una curva in un' altra dello stesso genere di essa. Su la qual cosa è ben rileggér le ricerche fatte dal sommo Newton ne' Principj Matematici della Filosofia Naturale.

§. 33. *Scol.* La Teorìa de' Luoghi Piani di Apollonio resta compiutamente dimostrata, sol che si proponga l'Equazione A per la retta, e per lo Cerchio, e vi si usino le addotte tranformazioni. Ed anzi dall'Equazioni A, B, C, D può intendersi la Teorìa, che a' Luoghi Solidi, ed Ipersolidi debbane per tali incidenti convenire.

PROP. XII.

(c) Il Sommo Newton nel proporre l'organica descrizione delle curve algebriche si valse ingegnosamente del moto di due angoli dati intorno a' loro vertici. Cioè a dire se due angoli girino intorno a' vertici loro, (rimenendone inveriate le quantità di ciascheduno), e l'intersezione di un lato di un angolo con un lato dell'altro facciasi percorrere una retta data di posizione, che non passi per alcuno de' vertici de' detti angoli; l'intersezione degli altri due lati vi segnerà una Sezione conica. Se quella si trasporti per una curve conica, quest'altra dovrà segnarne una Linea di 3. Ordine. E così più oltre, ove convien supplirvi alcune limitazioni. Intanto il Sig. Mac-Laurin egginnse le dimostrazioni a questi Teoremi, e poi rese più egevoli coteste ricerche. E 'l Sig Braikenridge le ampliò mirabilmente coll'introdurvi tre poli, intorno a' quali si aggiran tre rette: e dalle linee, in che si muovon due di queste tre intersezioni, ei ne rilevò la linea descritta dalla rimanente.

PROP. XII. PROBL.

§. 34. *Date di posizione due qualunque curve, ed un punto fuori di esse, condurre da questo su quelle due incidenti, che comprendan fra loro un angolo dato, e sien direttamente, o reciprocamente proporzionali a due rette date.*

Soluz. Part. I. Sieno NAR, e QFS le due curve date, fuori delle quali sia il dato punto P, dal quale debbansi ad esse condurre due incidenti, che comprendano un angolo dato ϕ, ed abbiano una ragion data. La curva *nar* sia la derivata dalla proposta NAR per division diretta, ed ella si concepisca trasferita nel sito avventizio $n'a'r'$, sicchè l'angolo CPC' sia uguale al dato ϕ: e'l punto n' sia un degl'incontri della curva $n'a'r'$ colla data QBS, se il Problema sia possibile. Si unisca la retta Pn', e si formi nel punto P della $n'P$ l'angolo $n'Pn$ uguale al dato ϕ; dico esser le due rette Pn', e PN, quelle, che si richieggono.

Dimos. La retta $n'P$ è uguale (*a*) all'incidente P*n* nella derivata *nar*. Ma l'è poi PN a P*n* nella ragion data: dunque in tal ragione dovrà stare la PN alla Pn', le quali comprendendo benanche un angolo uguale al dato ϕ, saranno le richieste.

Part. II. Lo stesso artifizio s'impieghi a risolvere il proposto Problema, quando le richieste incidenti, oltre al comprendere un angolo dato, debban contenere un rettangolo dato. Ed una simigliante dimostrazione dovrà convincerne della verità della costruzione.

§. 35. *Coroll.* Un simile artificio potrà adoperarsi, se mai si proponga di condurre le incidenti PN, Pn', che contengano un angolo dato, ed una di esse sia una certa funzione dell'altra.

PROP. XIII.

(*a*) Leggasi la prec. Prop. ed i Coroll. I. e II.

PROP. XIII. PROBL.

§. 36. *Da un dato punto fuori di una curva Transcendente condurle una Tangente.* (a)

Soluz. Sia EFG la data curva, ed R quel punto dato; di dove intendasi condotta la Tangente RE ad essa curva, e per lo contatto E l'ordinata EB al di lei asse PB. Inoltre si tirino dal punto R le due rette RS, ed RQ respettivamente parallele alle BE, e BP: e supposto esserne il punto P il principio delle ascisse di tal curva pongansi $PB=x$, $BE=y$, $SR=a$, $PS=b$, e quindi $QE=y-a$, $RQ=PB\pm PS=x\pm b$, ove il segno più dee militare per quelle curve, che volgono all'asse le concavità loro, e 'l meno per quelle altre, che la convessa lor parte gli rivolgono. E finalmente sia la Sottangente $TB=X$. E poichè il triangolo RQE è simile all'altro TBE, sarà RQ:QE:: TB:BE, cioè ne' loro simboli dovrà esserne $x\pm b:y-a$ :: X:y, onde sarà Tav. V. Fig 9.10.

$$\frac{X}{y}(y-a)=x\pm b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad F$$

Ciò posto, se la X sia una funzione algebrica della variabile x, o se pur sia algebrico il rapporto della X alla y, l'Equazione F sarà benanche algebrica: e la locale, che avrà cotesta Equazione, dovrà combinarsi colla data curva, affin di rinvenirvi l'ignoto punto punto E. Ed una simigliante combinazione dovrebbesi praticare, se ne fosse l'anzidetta locale trascendente.

§. 37. Esemp. I. *La data curva EFG suppongasi essere una Logisti-*

(a) Nella Geometria Descrittiva si assume come postulato il poter condurre ad una qualunque curva una tangente da un dato punto: onde vi si dovevan qui segnare le tracce euristiche.

gistica avente per suo Assintoto la BP, *e per Sottangente la gran-*
Tav. V. Fig. 9 *dezza c costante*. In tal caso dovrà porsi *c* per X nell'Equazione F, ed $x-b$ nel secondo membro di essa. E l'Equazione della desiata locale sarà

$$cy-ac=xy-by$$

Or questa curva l'è un'Iperbole tra gli Assintoti, come n'è chiaro. Cioè a dire presa la SC uguale alla Sottangente TB, e condottavi per C la CH parallela alla SR, la detta Iperbole dovrà avere per suoi Assintoti le SC, e CH, e per potenza il rettangolo di SR in TB.

Tav. V. Fig. 10. §. 38. Esemp. II. *La curva data sia una Cicloide volgare, che abbia per asse la* PB, *ed* R *sia quel punto, da cui vogliasi condurle una Tangente*. Per rinvenir la divisata locale si chiami r la metà del detto asse, cioè il raggio CP del circolo generatore di tal curva. Sarà per la natura di questa Cicloide TB:BE::PB:BK, cioè $X:y::x:\sqrt{(2rx-xx)}$. Sicchè sostituendo nel I. membro dell'Equazione F la seconda di queste due ragioni in luogo della prima, e scrivendovi $x+b$ nel II, avrassi, fatti gli opportuni riducimenti, la seguente Equazione

$$x(y-a)^2=(2r-x)(x+b)^2,$$

che sarà ad una curva di 3. Ordine da doversi colla data Cicloide combinare pel nostro intento.

§. 39. *Coroll.* Se da un punto dato dentro di tal Cicloide le si volesse condurre una normale, basterà per esso tirare una tangente alla sua Evoluta, che l'è una curva simile ad essa, ed uguale.

OPU-

OPUSCOLO X.

Varie Dilucidazioni de' Problemi precedenti.

§. 40. I Problemi delle *Applicazioni* sin quì recati non sôn mica, come altri può crederli, o sterili o inutili ricerche; ma essi son come mezzi, onde non pochi difficilissimi Problemi, ed anche trascendenti si sciolgono prontamente e con aggradevole geometrico nitore. Così se un ci proponga *a rinvenire il lo-gmo Nep-eriano di un numero dato*, ed insiem ci offra una Logistica naturale; il Problema si vedrà ridotto a condurre in questa curva un'ordinata uguale ad una retta, che quel numero n'esprime. E ciò per lo primo Problema può agevolmente ottenersi. E s'ei ci domandi *un numero, il quale sia al suo log-mo naturale nella data ragione di* $\theta:1$, converrà in quest'altro caso formar nell'asse di tal curva, e nel principio delle sue ascisse un angolo, di cui la tangente trigonometrica sia θ: e cotesta retta segnerà nella detta Logistica il punto, che si richiede. Ma quanti Problemi sulle trascendenti logaritmiche, e sulle circolari (*a*) per mezzo di geometriche operazioni fatte nella Logistica, e nella Cicloide non vi restan facilmente risoluti? Intanto basta l'aver coteste cose quì indicate in chiarimento della nostra assertiva, e della prima Proposizione dell'Opuscolo precedente: e per poi illustrarne i Corollarj, e la seconda Proposizione conviene intenderne i seguenti Problemi.

(*a*) Che anzi tutte le verità, che gli Analisti dimostrano sulle trascendenti logaritmiche, si posson rilevare nelle logistiche con operazioni geometriche ivi praticate.

DILUCIDAZIONE

Delle Teorie, che contengonsi ne' Problemi I. e II.

§. 41. Le Curve Concoiformi, che furono semplicemente indicate nel §. settimo, quì deggion sottoporsi all'Analisi Algebrica, affinchè ciascuna di esse coll'Equazione, che le conviene, possa esibirci la sua natura, e le proprietà, che le competono. E gioverà in tal congiuntura estendere siffatte ricerche a quelle linee Concoidali, le cui generatrici sien curve algebriche di qualunque grado.

PROP. XIV. PROBL.

§. 42. *L'angolo dato* ADE *muovasi nel piano* ABE *con tal legge; che il dato punto* E *del lato* DE *vada continuamente strisciando sulla data retta* EB, *mentre l'altro lato indefinito* DA *passi per lo dato punto* A; *vuol sapersi la natura della curva, che il vertice di quell'angolo descrive.*

Tav. VI. Fig. 1.

Soluz. Dal punto A conducasi la retta AQ parallela alla data EB, e da' punti A, e D si abbassino le AB, e DQ perpendicolari alle EB, ed AQ respettivamente. Ed oltre a ciò s' inclini dal punto A sulla BE la retta AT, che faccia l'angolo ATC uguale al dato CDE. E poi ponganfi $AB = a$, $AT = b$, $DE = c$, $BT = \sqrt{(bb - aa)} = e$, $AQ = x$, e $QD = y$. Sarà, pe' triangoli simili ADQ, e CDF, $QD : DF :: AQ : CF$, cioè ne' loro simboli $y : y - a :: x : CF$, che sarà $(xy - ax) : y$. E sarà quindi $BC = BF - FC = x - (xy - ax) : y = ax : y$, e finalmente dovrà esser la $TC = BC - BT = (ax - ey) : y$. Ma pe' triangoli simili ATC, CDE sta $AT : ED :: TC : CD$, cioè ne' loro valori

$$b : c :: \frac{ax - ey}{y} : CD = \frac{c}{b} \cdot \frac{ax - ey}{y}.$$

E la

E la medesima CD, ch'è uguale a $\sqrt{(CF^2+FD^2)}$, rinviensi uguagliar la radice de' due quadrati di $(xy-ax):y$, e di $y-a$. Dunque pareggiando questi due diversi valori di CD^2 con simplificarne il risultato avrassi

$$y^4-2ay^3+a^2y^2+x^2y^2-2ax^2y+a^2x^2=\frac{cc}{bb}(ax-ey)^2 \ldots A$$

§. 43. *Coroll.* Se l'angolo CDE diventi infinitesimo, il punto E del lato DE, che dee strisciare su per la EB, cadrà in un punto dell'altro lato DC. In tal caso la retta AT dovrà restare dall'altra parte della AB, convenendone colla EB ad un punto infinitamente distante da B. Il perchè divenendo $e=b=\infty$, il secondo membro dell'Equazione A ridurrassi a $ccyy$. Ed essa Equazione dovrà contrarsi in quest'altra

$$(yy+xx)(y-a)^2=ccyy$$

che appartiensi ad una Concoide volgare per esservi $y:y-a::\sqrt{(xx+yy)}:c$, cioè DQ : DF : : DA : DC.

PROP. XV. PROBL.

§. 44. *Dato di posizione il punto* A, *e la curva algebrica* BCE, *determinar la natura di quella Concoiforme, che verrà descritta dall'estremo* D *della retta* DCA, *la quale vada strisciando col suo dato punto* C *sulla* BCE, *e sempre passi per quel punto* A. *Tav. VI. Fig. 2.*

Soluz. Dal punto A conducasi la retta AQ, che siane una comoda direttrice della data Curva, e su tal retta da' punti C e D si abbassino le perpendicolari CN, DQ, e l'altra CP dal punto C sulla DQ. Inoltre sia $DC=c$, $AQ=x$, $QD=y$, $AN=v$, $NC=z$, onde sarà $AD=\sqrt{(xx+yy)}$. Ed essendo pe' triangoli simili ADQ, CDP, AD : DQ :: CD : DP, sarà ne' loro simboli $\sqrt{(xx+yy)}:y::c:DP$.

E così

E così pure dall'essere AD : AQ :: CD : CP dovrà essere $\surd(xx+yy)$: x :: c : CP. Dunque sarà

$$CP = NQ = \frac{cx}{\surd(xx+yy)}$$

E quindi $$AN = AQ - QN = x - \frac{cx}{\surd(xx+yy)} = v;$$

$$DP = \frac{cy}{\surd(xx+yy)};$$

ed $$NC = DQ - DP = y - \frac{cy}{\surd(xx+yy)} = z:$$

Ciò posto l'Equazione alla curva BCE sia generalmente

$$\alpha + \beta v + \gamma z + \delta vz + \epsilon vv + \lambda zz + ec = o,$$

sarà chiaro, che surrogando in essa i già recati valori delle v, e z, e fattevi le debite riduzioni, abbiasi ad avere in x ed y un'altra Equazione, che sarà quella della richiesta Concoiforme.

§. 45. *Coroll. I.* Essendo algebrica la data curva BCE, anche sarà tale la Concoiforme, che da essa nel prescritto modo vien generata.

§. 46. *Coroll. II.* E *se tra le due curve* BCE, HDG *date di posizione, la prima delle quali sia algebrica, e l'altra trascendente, vogliasi adattare una data retta* CD, *che passi per lo dato punto* A, gl' incontri della linea HDG colla Concoiforme generatavi dalla BCE daranno i punti addimandati.

§. 47. *Scol.* E' un affare di lieve calcolo l'indagare il grado di questa Concoiforme; il sito, e 'l numero de' suoi rami; s'ella abbia delle curve assintotiche; de' punti distinti, ec. E non sarà malagevole il digredire dalla sua Equazione a quella della generatrice; il determinare la natura di questa Curva, perchè quella Concoiforme sia rettificabile pe' logaritmi, o per gli archi circolari; il saggiarne s'ella possa esserne assolutamente rettificabile, ec. Ed altre

altre simili cose potran proporsi, che serbiamo a' nostri Analisti, affinchè lodevolmente vi si possano occupare.

§. 48. *Scol. II.* Per estendere le ricerche del II. Problema dell' Opuscolo precedente, e per aggradire a certi nostri Geometri, eccone un altro affine.

PROP. XVI. PROBL.

§. 49. *Date di posizione la retta* PA, *e le due curve* PQA, PFG, *la prima delle quali sia algebrica, e l'altra comunque; applicare tra le dette linee una retta parallela alla data* AG, *perchè quivi ne resti divisa in una ragion data.*

Soluz. La data retta AP assumasi per comune direttrice delle due date curve PQA, PFG, e le ordinate vi sien parallele all'altra retta AG. Inoltre si prenda nella PA un punto P, qual ne piaccia, e da esso si computino nella medesima PA le indeterminate x: cioè ponendovi la $PR = x$, sia la $RE = y$, e l'altra $RQ = z$, e la data ragione espongasi per $h:1$. Ciò posto, se la RQ sia un' esplicita funzione della x, che quì dinotiamo per $f(x)$, sarà per le condizioni del Problema $y = hf(x)$. Dunque dovrà combinarsi colla curva geometrica, o trascendente PFG quell' altra algebrica, che tien per sua Equazione $y = hf(x)$. E le intersezioni di queste due locali daranno i punti soddisfacenti al Problema. *Tav. VI. Fig. 10.*

E se l' Equazione della curva PQA sia generalmente

$$a + bx + cz + dxz \ldots\ldots + Uz^n = o,$$

di dove non possa per difetto dell'Algebra comune carpirsi il valore della z in x, converrà sostituire in detta Equazione $y:h$ per z. E la curva algebrica, che avrà questa novella Equazione, sarà la locale da doversi combinare colla curva trascendente PFG, affin di averne que' punti soddisfacenti.

§. 50.

§. 50. *Esemp.* La seconda delle due proposte curve sia una Cicloide Galileana, e la prima di esse ne sia il suo Circolo generatore del raggio r. Ed oltre a ciò vogliasi condurre l'ordinata FQR nella Cicloide PEG, che ne resti divisa da quel cerchio in una ragion data: cioè, che stia FR : RQ :: h : 1. Sarà in tal caso $f(x) = \sqrt{(2rx - xx)}$. E l'Equazione indicata nel primo §. dell'addotta soluzione diverrà $y = h\sqrt{(2rx - xx)}$, cioè $yy = hh(2rx - xx)$....A ch'è ad un'Ellisse conica. E tal curva dovrà colla data Cicloide combinarsi per poterne i punti soddisfacenti al Problema ottenere.

§. 51. *Coroll.* Questo geometrico artifizio si dovrà praticare, se *voglia rinvenirsi un arco di cerchio, che serbi una ragion data al suo seno.* Ed anzi tanti altri Problemi affini si potranno risolvere nello stesso modo.

PROP. XVII. PROBL.

§. 52. *Poste le medesime cose della Prop. IV., ritrovare il luogo delle riunioni delle inflesse, quando il polo* D, *ed i due punti* A, *e* B *non sieno per diritto.*

Tav. VI. Fig. 3. *Soluz.* Dal punto D si meni la DC perpendicolare alla direttrice AB, e l'altra DT ad essa parallela, la qual ne incontri in S e T le PE, RF, che son perpendicolari alla medesima direttrice, e passano per le sezioni delle inflesse AO, BO co'lati del dato angolo L. E poi pongansi CM $= a$, CN $= b$, DC $= c$, CA $= f$, CB $= g$, CE $= v$, CF $= z$, Tang. M $= m$, Tang. N $= n$; sarà ME $=$ CE $-$ CM $= v - a$, NF $=$ CN $-$ CF $= b - z$, e quindi EP $= mv - ma$, RF $= nb - nz$, PS $=$ SE $-$ PE $= c - mv + ma$, e TR $=$ TF $-$ RF $= c - nb + nz$: ove pongasi per brevità $g - f = e$.

Ciò posto per la similitudine de' triangoli DSP, DTR stà DS : DT :: SP : TR: dunque sarà ne' loro simboli $v : z :: c - mv + ma$:

$e -$

$c - nb + nz$. E riducendo in Equazione questa analogia, e poi prendendone il valore della z, sarà cotesta grandezza

$$z = \frac{cv - nbv}{c - mv - av + ma} = CF,$$

e quindi

$$BF = CB - CF = g + \frac{nbv - cv}{c + ma - v(m+n)};$$

E poi ben s' intende, che sia $AE = CE - CA = v - f$; $AB = CB - CA = g - f = e$, e che posta $AH = x$, ed $HO = y$ debba esser $HB = e - x$. Ma pe' triangoli simili AHO, AEP sta $AH : HO :: AE : EP$, e per la similitudine degli altri due BHO, BFR l'è pure $BH : HO :: BF : FR$. Dunque ne' loro simboli, da' quali siavi eliminata la z, sarà $x : y :: v - f : mv - ma$, ed $e - x : y :: \alpha + \beta v : \gamma + \delta v$. Esprimendo per α e γ tutti i termini costanti, che si ritrovano in quella ragion semplificata, e per β e δ i coefficienti della v, Sicchè riducendo queste due analogie in Equazioni, ed eliminando la v da esse, si dovrà ottenere l' Equazione della cercata locale, che sarà ad una curva conica, come ben si comprende dal pareggiarne i due valori della v di esse Equazioni. Infatti il sottoposto pareggiamento è di que' due valori

$$\frac{max - fy}{mx - y} = \frac{\epsilon y - ay - yx}{e\delta + \beta y},$$

che moltiplicati in croce produrranno questa quadratica indeterminata Equazione (*a*)

$$(max - fy)(e\delta + \beta y) = (\epsilon y - ay - yx)(mx - y).$$

RI-

(*a*) Per le molte condizioni, e grandezze, che osservansi in questo Problema, altrettanti simboli han dovuto impiegarsi nel risolverlo.

RIFLESSIONE

Sulla Teoria delle Inflesse indicata nelle Prop. III. e IV.

§. 53. Per ampliar la Teoria de' luoghi, ove si uniscono le inflesse. noi abbiamo recato il presente Problema: ed è di bene aggiungervi le seguenti considerazioni.

§. 54. I. La Proposizione IV. dell' Opuscolo precedente è suscettibile di conversione. Pappo Alessandrino nella Prop. 130. del settimo Libro delle Matematiche Collezioni, ove par che parli di tutt' altro, vi ha fissate le debite condizioni: come lo ha sagacemente avvertito il Signor D. Giuseppe Scorza. E resterebbe a determinar quelle, che si convengono a convertire il Teorema, che dal precedente Problema si rileva.

§. 55. II. Se diansi di posizione i due punti A, e B, le due rette LM, ed LN, ed una qualunque curva OQ, e da que' punti inflettansi in questa curva le due qualunque AO, BO, che ne incontrino le date rette LM, ed LN, in P ed R; sarà chiaro, che la retta PR fra le sezioni non debba converger sempre ad un dato punto. In tal caso *vi sarà una curva continuamente toccata da coteste infinite rette fra le sezioni, cioè quella curva, che si forma da' punti di concorso delle intercette*. E noi preghiamo gli Analisti a determinarla non solo quando le LM, LN sieno rette; ma quando in luogo di esse siavi una curva algebrica di qualunque grado.

Tav. VI. Fig. 3.

§. 56. III. Un altro Problema ci si offre sulla inflesse, che ne sembra importante, e da dovervisi abozzare un'algebrica soluzione. Cioè se dal polo D di una curva conica RLP le si conduca la segante BR, ed i punti P ed R delle sezioni si uniscano cogli altri due A e B, che son dati di posizione con quella curva, e posti a diritto col suo polo D, il punto O dell'unione delle inflesse AQ e BO in qual curva si dovrà ritrovare?

Tav. VI. Fig. 4.

OPU-

Preparata la costruzione, come vedesi nella fig. 4, si abbassino da' punti P, O, R le perpendicolari PE, OH, RF alla BD. E posta la tang. $D = t$, sia $DE = v$, $EP = z$, $DH = x$, ed $HO = y$. Sarà $z = tv$ per esserne $1 : \text{Tang.}\, D :: v : z$; e quindi sostituendo tv per z nell'Equazione della curva PLR riferita alle coordinate DE, EP, e poi risolvendola per determinarvi la v, le dilei radici saranno i valori delle DE, e DF. Dunque le AE, e BF saran due funzioni algebriche della sola t, e tali saran pure le PE, ed RF. Intanto pongasi $DB = e$, e quindi $BH = e - x$. Ed essendo simili i triangoli AEP, AHO starà $AE : EP :: AH : HO$: e per la similitudine degli altri due BFR, BHO sarà pure $BF : FR :: BH : HO$. Se dunque si surroghino in queste due analogie i simboli de' termini, che vi si contengono, avremo da esse due Equazioni, che racchiudono le tre indeterminate x, y, t.

§. 57. Fin quì la Geometria, come guida fedele, ne ha condotti. Resta (a) dunque all'Analisi l'eliminare la grandezza t dalle anzidette

(a) Egli è fuor di dobbio, che le regole proposte dal sommo Newton per siffatte eliminazioni, ed in formole generali esibite, sien chiare, ed ingegnose. Ma esse non per tanto c'impegnano in calcoli inestricabili, o assai laboriosi, tostochè l'ignota da eliminarsi da due date Equazioni ne monti ad un grado superiore al secondo. E, quel che più ne duole, l'Equazione finale suol esserne d'inutili, o straniere radici avviluppata. Onde l'è verisimile, che l'illustre Giovanni Bernulli ad iscansar tai scogli siasi condotto per altra via nel rintracciar colla luce della Cartesiana Geometria le caustiche per riflessione. Ma gli analitici ripieghi adoperati dal Valentuomo sono più ammirabili, che didascalici. Ed in un tal Problema non pur conviene ragionar sulle operazioni risolutive; ma chiarirne benanche il quesito: determinandone che importi l'eliminare un'ignota da due Equazioni, in una delle quali ella ne abbia la n per massimo esponente, e la m poi nell'altra.

Equazioni: affinchè quella, che poi n'emerga tralle x, ed y, ci dichiari la natura della curva OG. Or sebbene non sien che due coteste Equazioni, onde chiaramente il metodo si comprenda da potervisi la x eliminare; pur nondimeno un tal lavoro c'impegna in calcoli spaventevoli, e nel di loro risultato dovran tramischiarsi fattori inutili, ed indiscernibili da quello tra essi, che è il vero. Ma in tal caso dall'esser noto pe' Teoremi della Geometria Organica il grado della risultante Equazione, si potrà con più agio impiegare il metodo del Sig. Bezout, il qual consiste nel moltiplicar le dette Equazioni per due convenevoli Polinomj, e nel porre uguali a zero que' termini dell'Equazion-somma, da'quali vogliasi la x eliminare.

§. 58.

Or con tal disegno fattosi il sommo Eulero a specular l'argomento si avvisò cotesta eliminazione dover consistere nel rinvenire il rapporto de' coefficieoti delle anzidette Equazioni; affiochè elleno potessero contenere una radice comone, o un fattor comune da lui indicato per $z - w$. E da un tal principio col metodo de' coefficienti indeterminati pervenne facilmente al suo iotento: e fu di sprone al Sig. de la Grange, cui forse quella unica comun radice non arrise, di giugnere per vie più sicure ad una tal meta. Or questo Geometra esibì la prima delle dette Equazioni, ch'è del grado m, nella seguente forma $1 + Ax + Bxx + Cx^3 + ec = 0$...(A): e l'altra del grado n in quest'altra $1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{xx} + ec = 0$...(B). Dipoi suppose essere $1 : \alpha$, $1 : \beta$, ec. le radici dell'Equazione (A): che sostituite nell'altra (B) ne daran le seguenti $1 + a\alpha + b\alpha\alpha + ec = 0$, $1 + a\beta + b\beta\beta + ec = 0$, ec. il prodotto delle quali, ch'ei chiama π, convien che sia zero, per dover esserne ciascuna di esse soddisfacente al nesso dell'Equazioni (A), e (B). Con che essendo $l\pi = l(1 + a\alpha + b\alpha\alpha + ec.) + l(1 + a\beta + b\beta\beta + ec.) + ec.$, ei risolve i logaritmi della seconda parte di questa Equazione nelle loro serie, ed ingegnosamente poi le somma, senza che più si ravvisi (*pag. 51. not. III.*) qualcuna delle α, β, ec. E chiamando φ cotesta somma, dovrà esserne e elevata alla quantità $-\varphi$ uguale a zero: cioè $1 - \varphi + \frac{1}{2}\varphi\varphi - ec = 0$. E quest'ultima Equazione, che contiene solamente i coefficienti delle (A), e (B), riget-

§.58. IV. Se diansi di posizione due rette, ed una qualunque curva, potrà sempre in virtù della Prop. decimasettima iscrivere un triangolo tra queste linee, talchè i suoi lati passino per tre punti dati. Ma non sarà malagevole per le precedenti cose risolver quest' altro Problema affine. *Date di posizione tre curve, due delle quali sieno algebriche e l'altra di qualunque natura, iscrivere in esse un triangolo, i cui lati passino per tre punti dati*. E se mai daremo un numero n di curve, ed altrettanti punti, vi potrem sempre *iscrivere un poligono del numero n di lati, i quali passino per que' punti*? Se diansi di posizione tre cerchi, e tre punti, l'*iscrivere in quelli un triangolo, i cui lati passino respettivamente per que' punti, sarà un Problema analogo a quello del Sig. Giordano* (Opusc. I.)? Intanto da questo Pro-

rigettandosi i prodotti delle A, B, C, ec eccedenti la dimensione n, e que' delle a, b, c, ec., che ne sorpassino la m, sarà la richiesta. Questa dissertazione del lodato Analista è registrata nell'Accad. di Berl. ann. 1769, e l'altra dell'Eulero è per l'anno 1764. Sulla qual cosa parci, che il Sig Montucla abbia inconsideratamente asserito, che quivi il Sig. de la Grange *elimini la x da due Equazioni cubiche, esaminandone un caso particolare*.

Che se diansi quantesivogliano Equazioni con altrettante ignote ascendenti ad un qualunque grado, qual sarà mai il metodo per prodorne l'eliminazioni di esse ignote? Queste ricerche sono il soggetto di un' Opera voluminosa dell'insigne Bezout: e lo spirito del metodo, ch' ei ne propone, è il seguente. „ Si moltiplichino le date Equazioni per altrettanti Polinomj, che abbiano le dette ignote, „ ed i coefficienti indeterminati. E presa la somma di tali prodotti, ch' ei suol „ chiamare *Equazion-somma*, vi si pongano uguali a zero i termini, che contengan le ignote da eliminarsi. Ma quì la convenevolezza di que' Polinomj n'è un nodo, che il Bezout impegnasi a distrigar saggiamente, abbisognandone il calcolo delle differenze finite, ed una somma destrezza, e sagacità nell'Analista. Or da tutte queste cose può conchiudersi esser tuttavia desiderabile, che le regole di cotesse eliminazioni fosser più precise, e più chiaramente dimostrate; affinchè agevol ne riesca il poter l'Equazioni da siffatti analitici viluppi dislacciare.

Problema potrà in facil modo risolversi il seguente. *Dato un cerchio, circoscrivergli un Poligono del numero n di lati, sicchè i vertici de' suoi angoli tocchino altrettante rette date di posizione.*

Tav VI. Fig. 5. §. 59. V. Similmente, *se tra le date curve algebriche* AMN, BQR *vogliasi applicare la retta* AB, *sicchè le perpendicolari* AC, BD *erette ad essa da' suoi estremi passino pe' due dati punti* C *e* D, un tal Problema si dovrà col metodo di eliminazione sciorre generalmente. E poichè cotesta indagine è come un Porisma del seguente difficilissimo Problema, qual si è quello di *tirare una tangente comune a due curve algebriche di qualunque grado*, sarà conveniente l'abbozzarne di quel Problema l'analitica soluzione.

§. 60. Si abbassino (eccone i dilei delineamenti) le AK, e BH perpendicolari alla retta CD, che passi pe' dati punti C, e D: e questa si proponga per comune direttrice delle due date curve. Saranno AK, e BH tra loro parallele al par delle altre due AC, e BD. Dunque il triangolo KAC sarà simile all' altro BHD. E condotta dal punto medio T della BA la TS pasallela alla CA, sarà poi CS = SD, ed AS = SB. Ciò posto, sia $CK = x$, $AK = y$, $DH = v$, $BH = z$, e $CS = SD = a$. Sarà per que' triangoli simili KAC, BHD, $CK : AK :: DH : BH$, cioè $x : y :: v : z$, e quindi $z = \frac{vy}{x}$. Se dunque nell'Equazione alla curva BQR, la quale generalmente s' indichi per $f + gv + hz + ivz + Kv^2 + \text{ec.} = 0$, si sostituisca $vy : x$ per z, si avrà un'Equazione a tre variabili x, y, v. Ma un'altra colle medesime variabili si ottiene dal pareggiarne le rette AS, ed SB. Dunque da queste due Equazioni dovrà per gl' indicati metodi eliminarsi la v; e la risultante tra x, ed y potrà esserne ad una locale da doversi coll'altra curva AMN combinare per l' indagine de' punti soddisfacenti.

§. 61.

§.61. VI. Prima d'introdurci in altre Teorie dell'Opuscolo prec. per poterle vie maggiormente quì chiarire, abbiamo stimato conveniente d'intrattenerci alquanto in queste indagini per potervi alcune nuove cose per utile de' giovani, e per aumento della Scienza speculare. Ed in prima deesi avvertire, che nel conducimento di cotest' eliminazioni vi vuol magistero, e sagacia; affinchè l'Equazione finale a due variabili non sia di un grado superiore al vero, nè sia risolvibile in due, o più fattori. Perciocchè ciascuno di essi ne offrirebbe una curva diversa dalle indicate dagli altri: nè saprebbesi quell'una, che dee esserne al Problema soddisfacente (a). Infatti, se la risultante da coteste eliminazioni sia la seguente Equazione (P) a due variabili, cioè $y^3 - xyy + y(xx - ax) + axx - x^3 = 0$, i cui fattori sono $y - x = 0$, ed $yy + xx - ax = 0$, qual di coteste due Equazioni si dovrà alla linea richiesta appartenere? ne sarà questa una retta indicata dalla prima di esse, o ne sarà il cerchio dimostratone dall'altra?

§.62. VII. Inoltre la permutazione delle coordinate in una curva algebrica non vi cangia il grado dell'Equazione, che le conviene, ma sol ve la trasforma. E di due variabili socie di detta curva, che vogliansi assumere per coordinate, che dovrà poi dirsi? Questa nuova curva il più delle volte è differente dalla proposta sì nella natu-

(a) Allorchè si cerchi una curva, cui debba competere una proprietà data, la qual indagine è diversa dalla quassù indicata, il calcolo potrà esibirne due, o più di coteste linee. Così, per ragionare sull'addotto esempio, propongasi di ritrovare una curva, la quale tra le infinite, che corrispondano ad una stessa ascissa, abbia per massimo l'integrale di questa formola $(3ax - 3xx - yy)(ax - xx - \frac{4}{3}xy + yy)dx$. Colle regole del metodo de' massimi, e de' minimi si rinverrà l'Equazione (P): e da questa poi se ne trarranno le due recate Equazioni per la retta, e per lo cerchio.

natura, che nel grado della caratteristica di lei Equazione. Ed un tal Principio può analiticamente dimostrarsi nel seguente agevol modo.

§. 63. Le coordinate della proposta curva si dicano x, ed y: e quelle due variabili socie di essa si chiamino $f(x,y)$, e $F(x,y)$ respettivamente. Inoltre le coordinate della nuova curva, le quali debbano queste due funzioni uguagliare, si esprimano per v, e z. Sarà

$$v = f(x, y), \text{ e } z = F(x, y).$$

Dunque da queste due Equazioni, tenendosi conto di quella alla proposta curva, dovranno eliminarsi le x, ed y: e l'altra, che poi ne risulta tralle v e z, sarà l'Equazione della nuova curva.

§. 64. VIII. Finalmente sarà dicevol chiusura di questi nostri, qualunque siensi, euristici concetti, il voler risolvere generalmente, e per vie prettamente algebriche il seguente Problema, che già fu risoluto colla Sintesi, e nel più semplice suo caso dal P. Guido Grandi valentissimo Geometra Italiano.

PROP.

§. 65. Dato di posizione il punto P, e la curva conica NGn, e da quello su questa conducasi una secante Pn; ritrovare il luogo del punto medio T della corda Nn, o di un qualunque altro punto, ove la Nn resti divisa in una ragion data.

Soluz. Cas. 1. Dal dato punto P si meni la PR parallela all' asse della data curva, e su questa retta si abbassino le perpendicolari NM, *nm*, e TR, da' punti delle sezioni della corda N*n*, e dal proposto punto T. Ed oltre a ciò ponganzi PM $= v$, MN $= z$, PR $= x$, RT $= y$, Tang. P $= t$, e l'Equazione della data curva NG*n* rapportata alla direttrice P*m*, esprimasi generalmente per Tav. VI. Fig. 6.

$$zz = p + qv + rz + svv \;\ldots\; \mathrm{A}$$

Sarà chiaro (§. 56.) esserne $z = tv$. Onde sostituendo in A questo valore della z, sarà

$$t^2v^2 = p + qv + rtv + sv^2 \;\ldots\ldots\; \mathrm{B}$$

Ed ordinando rispetto ad v quest' ultima equazione avrassi

$$v^2 - \frac{qv + rtv}{tt - s} = \frac{p}{tt - s} \;\ldots\ldots\; \mathrm{C}$$

Dunque le due radici dell' Equazione C dinoteranno i valori delle due ascisse PM, e P*m*: e la PR semisomma di queste sarà uguale ad $\frac{1}{2}(q + rt):(tt - s)$, come l'è noto dalle Teorie delle Algebriche Equazioni. Ma la PR si è posta uguale ad x, ed è poi $t = y : x$, essendo PR : PT :: 1 : Tang. P. Dunque pareggiando questi due valori della PR con porvisi per t la $y : x$, sarà, fattevi le debite riduzioni,

$$y^2 = \tfrac{1}{2}(qx + ry) + sx^2 \;\ldots\ldots\; \mathrm{D}.$$

Il perchè *la locale del punto medio* T *della detta corda* N*n* *è una sezione conica simile alla proposta* NG*n*: cioè a dire, se la data

curva

curva NGn suppongasi esserne un' ellisse, la locale del punto medio T sarà pure un' ellisse: ed oltre a ciò gli assi conjugati di questa saran proporzionali a que' della data. E lo stesso convenevolmente intendasi per le altre curve coniche.

Cas. 2. Nell' Equazione C pongasi $y:x$ per la grandezza t, ed ella poi si risolva rispetto ad v: avrassi

$$v = \frac{1}{2}\,\frac{qxx + ryx}{yy - sxx} \pm \frac{x}{yy - sxx}\sqrt{\left(\frac{(qx+ry)^2}{4} + pyy - psxx\right)} \ldots D$$

cioè a dire le PM; e Pm saran dinotate da cotesto gemino valore della v: e la Mm differenza delle PM, e Pm sarà espressa dalla differenza de' detti valori, cioè a dire sarà la

$$Mm = \pm \frac{2x}{yy - sxx}\sqrt{\left(\frac{(qx+ry)^2}{4} + pyy - psxx\right)}$$

Ed essendo Mm ad MR come Nn ad NT, cioè in una ragion data, ch' esprimiamo per quella di n ad m, sarà la MR uguale al già esposto valore della Mm moltiplicato per $\frac{m}{n}$. E sarà poi la PR, cioè la x, uguale alla somma de' valori delle due rette MR, e PM. Vale a dire sarà

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{qxx + ryx}{yy - sxx}\right) + \frac{hx}{yy - sxx}\sqrt{\left(\frac{1}{4}(qx+ry)^2 + pyy - psxx\right)} \ldots E$$

ponendovi la grandezza h per lo coefficiente costante del radicale. Intanto l' Equazione E si divida per la frazione $x:(yy - sxx)$, e vi si trasportino al I. membro le grandezze libere da' radicali, che sono nel II., avrassi un' Equazione di quarto grado per la richiesta curva. Cioè la

$$yy - sxx - \frac{1}{2}qx - \frac{1}{2}ry = h\sqrt{\left(\frac{1}{4}(qx+ry)^2 + pyy - psxx\right)}.$$

§. 66.

§. 66. *Scol.* Nelle analitiche soluzioni di questi Problemi geometrici noi abbiamo proccurato in varie guise di eliminarvi alcune variabili, che non dovean punto ingombrar l' Equazioni a certe curve. E per nostra buona ventura niun di que' nodi algebrici, il di cui risolvimento suol travagliare gli Analisti, n' è occorso. Così nella risoluzione di questo Problema, la quale da fonti puramente algebrici si deriva, l'ascissa x si è ritrovata uguale ad una certa funzione della grandezza t, ch' è la tangente trigonometrica di un angolo, cui corrispondono i doppj valori di ciascuna coordinata della proposta curva. Onde ad ottener l' Equazione all' altra curva, che vi si richiede, n' è bastato il sostituirvi la $y:x$ per la t. Ma queste, e simili investigazioni, che veggonsi proposte per le linee di secondo ordine, posson diriggersi benanche ad altre curve algebriche di qualunque grado, purchè esse sien segate in due punti dalla retta, che passi per un dato Polo. Il quale per tal fine in certe curve di terz' ordine convien, che stiavi nel perimetro: nelle linee di quart' ordine ei dee esserne un *punto doppio*. E così delle altre: del che vedi Eulero *Introd. in Anal. inf.* Vol. II. (*a*).

(*a*) Una linea di terz' ordine, che può esser segata in due punti da una retta, la qual si meni da un dato punto di essa curva, dee avere la seguente Equazione:

$$v^3+avvz+bvzz+cz^3-dvv-evz-fzz+gv+hz=0.$$

E quest' Equazione di terzo grado si abbassa al secondo con porvisi tv per z: Onde si potranno estendere ad una tal curva le ricerche del presente Problema. E così convenevolmente per le altre curve di un ordine più alto.

DILUCIDAZIONE DEL PROBLEMA VII.

§. 68. Il miglior commento, che può apporsi alla Proposizione VII. è il risolvere colle sue guide due famosi Problemi, l'uno sulla *moltisezione angolare*, e l'altro sull'*anomalie de' pianeti*, e di confacenti dottrine poi adornarla.

PROP. XIX. PROBL.

§. 69. *Dato l'arco circolare* QP *dividerlo in una qualunque data ragione* (*a*).

Tav.VI. Fig. 9. *Soluz.* Per lo punto P si tiri il diametro PA nel cerchio dato, ed intorno alla PA come asse si descriva la Cicloide Galileana PFG, di cui il detto circolo ne sia il generatore. Per l'altro estremo Q di un tal arco si conduca la QF parallela alla base AG di essa Cicloide, e si divida in V nella ragion data. E finalmente tra gli archi PQA,PFG di dette curve si applichi la *e*K parallela (*Prop.VII.*), ed uguale alla FV. L'arco PK sarà il richiesto.

Dim. I due archi circolari PQ, PK sono uguali per la natura della Cicloide PFG alle due rette QF, e K*e*. Dunque sarà PQ : PK :: QF : K*e* :: QF : FV.

PROP.

(*a*) Il celebre Giovanni Bernoulli nel *I. Vol. pag.* 511. così ragiona sulla natura di tal Problema: *hoc Problema indefinite conceptum transcendens est*. E forse voleva dire esser trascendente il detto Problema, se la ragion data sia irrazionale. *Ved.* §. 76.

PROP. XX. TEOR.

§. 70. *Se intorno all' asse AP della semicicloide PFG sia descritto il semicerchio PQA, e la semiellisse PHA, la quale abbia per asse minore la medesima AP, e per maggiore il doppio della CK, ch'è quanto il segmento maggiore AS della retta AP comunque divisa in S; io dico, che inclinando dal punto S nel semicerchio PQA una qualunque retta SQ, e distendendovi per Q l'ordinata FR della Cicloide, debba essere il trilineo circolare PSQ uguale al rettangolo della metà del raggio AC nella FH parte di quell' ordinata, ch'è tra la semicicloide, e la semiellisse.*

Dim. Si ponga il raggio $CA = 1$, $CS = e$, e quindi $CK = AS = 1 + e$. E poi suppongasi l' arco circolare $PBQ = QF = \phi$, e 'l suo seno $QR = x$. Sarà il settore circolare $PCQ = \frac{1}{2}\phi$, il triangolo $QSC = \frac{1}{2} QR \,.\, SC = \frac{1}{2} ex$, e quindi il trilineo $PSQ = PCQ - QSC = \frac{1}{2}(\phi - ex)$. E poichè dalla natura dell' ellisse AKP sta $CB : CK :: RQ : RH$, ovvero $CB : BK :: RQ : QH$, sarà $1 : e :: x : QH$, e quindi $QH = ex$, e sarà finalmente $FH = QF - QH = \phi - ex$. Dunque il trilineo circolare PSQ, che si è ritrovato uguale ad $\frac{1}{2}(\phi - ex)$, dee esser quanto il rettangolo della metà del raggio AC nell' intercetta FH. *Tav.VI. Fig.10.*

PROP. XXI. PROBL.

§. 71. *Data l'Anomalia media di un Pianeta rinvenirne la Coequata.*

Soluz. Cotesto Problema Astronomico, che destinasi a rinvenire il luogo di un Pianeta in un tempo dato, si converte in quest' altro geometrico *di dividere un semicerchio in una data ragione per* una

una retta, che passi per un dato punto del suo diametro. E ciò può ottenersi con applicare una retta data di sito, e di grandezza tra' perimetri di una Cicloide, e di un' Ellisse condizionate, come quì sopra (*a*).

§. 72. *Scol.* Un artefice, che non sia ignaro de' geometrici rudimenti, potrà con questi lumi congegnare un *Compasso anomalistico*, onde possa conoscersi il luogo di un Pianeta in un tempo dato. E noi ci avvisiamo, che s'ei vi pratichi delle minute graduazioni, quali soglion farsi con metodi moderni, potrà darci de' risultati soddisfacenti, e prossimi a' veri. Intanto sullo scioglimento del primo di questi due Problemi eccone alcune nostre considerazioni.

§. 73. I. Le curve sinora impiegate da' Geometri per la divisione di un arco circolare in una qualunque ragion data, sebbene sien tra se diverse nella ramificazione, e per le proprietà, che le adornano; in ciò non pertanto convengon fra loro, che a descriver ciascuna di esse ne abbisogni il moto rettilineo combinato coll' angolare. La *Spirale Archimedea, la Quadratrice di Dinostrato, l'Elice cilindrica, e la Cicloide Galileana* son le principali di queste curve, di cui convien recare una genesi distinta per poterne il suddetto assunto dimostrare.

§. 74. Ed in primo luogo, se una retta equabilmente si aggiri d'intorno ad un immobile suo estremo, ed in uno stesso piano, e quivi ne compia un perfetto rivolgimento; la figura, ch' ella ne descri-

(*a*) Il Cavalier Newton volendo geometricamente risolvere questo Problema combinò una Trocoide col Cerchio (*Prop. 31. Lib. I. Princ. Mat.*). Ma essendosi dipoi avvisato della difficoltà di descrivere la detta Trocoide, ne soggiunse un' aritmetica approssimante soluzione al Problema. Or noi vi abbiam combinato un' Ellisse, ed una Cicloide volgare, ch' è di facilissima descrizione.

descrive, sarà un *cerchio*, come l'è noto dagli Elementi (a). Ma se un punto si parta dall'estremo immobile di cotesta retta, ed equabilmente la percorra in tanto tempo, quanto ella ne impiega a descriver quel cerchio; il detto punto col suo moto rettilineo, e coll'angolare della retta dovrà descriverne la *Spira Archimedea*. E si verrebbe a generare un'*Elice Cilindrica* dall'estremo della retta circolarmente rotante, se nello stesso mentre il piano, ov'essa ne giace, vadasi movendo equabilmente, e con una data celerità per una retta perpendicolare al detto piano. Inoltre, se quell'estremo della mentovata retta, il quale n'era immobile al descriversi del cerchio, facciasi rinculare equabilmente e per una perpendicolare ad essa retta nel principio del suo rotamento; l'estremo mobile della medesima retta dovrà con questi due moti descrivere una *Trocoide*. La quale ne degenera in una *Cicloide Galileana*, se la celerità del regresso di tal retta sia quanto quella dell'altro estremo circolante. Finalmente ad un qualunque punto di un cerchio conducasi il raggio e la tangente indefinita, e mentre il raggio si muova con moto equabile angolare, finchè vi descriva un retto, la tangente si abbassi equabilmente e con moto a se parallelo, pervenendo nel centro con quel punto e nel medesimo tempo di quel rivolgimento angolare; la linea, che verrà descritta dalla continua intersezione del raggio, e della tangente mosse in tal guisa, si dirà *Quadratrice*.

§.75. Or nella genesi di ciascuna di queste quattro curve ben si comprende, che il moto angolare siasi col rettilineo convenevolmente combinato. E per poco, che talun si fermi a ponderar tali cose, vi

(a) Nella descrizione del cerchio esibita negli elementi piani non si esige l'equabilità del moto angolare della retta, che il descrive: ma ella nel nostro proposito è necessaria, come può conoscersi dalle seguenti definizioni.

vi vedrà esser trascendente il rapporto delle due celerità, che in ciascuna di esse ne abbisognano. Ma potrà poi concluderne, che una curva sia trascendente, se tal si trovi essere il rapporto di due de' *genetici* suoi dati? Non è nostra intenzione, ecco ciò che diciamo, lì voler questo Criterio quì proporre, o scandagliare. Ne basta la divisa, che saggiamente ne han dato gli Analisti per tali curve col dire: dover esser una curva trascendente, se il rapporto delle sue coordinate non possa con un'Equazione algebrica esibirsi. E 'l sommo Newton con aver detto, che tutti i punti di una curva trascendente non si possano geometricamente determinare, *cujus puncta omnia per longitudines æquationibus definitas determinari nequeunt*, riviene allo stesso. Conciossiachè quello, che non si può geometricamente definire, non potrà mai in un' espressione algebrica tradursi. Ma un' altra conseguenza vuol raccorsi da questa dottrina del Valentuomo: ed è, che una curva può esser trascendente, come lo è della Quadratrice, e della Logistica; sebbene infiniti de' suoi punti si possano geometricamente determinare: dapoichè infiniti altri ne resterebbero in essa a non potersi nello stesso modo ottenere.

§. 76. Ma ritornando al nostro assunto, da cui per poco abbiam diviato, noi diciamo, che tralle curve sinora impiegate per la division di un arco circolare in una data ragione irrazionale (il qual Problema è di sua natura trascendente) niuna sia più convenevole a quest' uopo, quanto la Cicloide volgare: come quella, che può descriversi organicamente in facil modo, e che al progredir delle ruote l' archetipo a' Geometri ne offre. E quindi, se la sapienza de' Greci in ogni punto de' loro geometrici lavori vedesi brillar giocondamente, in quest' oggetto parci, ch' ella debba cedere all' Italiana sagacia. Poichè il gran Galilei seppe scovrir nella natura cotesta curva, ch' essi punto non ravvisarono: e ne impegnò i suoi famosi discepoli Evangelista Torricelli, e Vincenzio Vivia-

Viviani ad altre nobilissime ricerche. Ed in vero il primo di questi due Geometri rilevò le più illustri proprietà della Cicloide, e quella principalmente, che ogni dilei ordinata pareggi la corrispondente somma dell'arco, e del suo seno retto nel circolo generatore. E l'altro poi di questo principio si valse a risolver generalmente il già detto Problema della moltisezione angolare (*a*).

§. 77. Ma pure non è questo quello, che più ne cale di dover quì marcare. Un Problema trascendente, che talun proponga sopra un geometrico soggetto (ecco ciò che ne pare doversi aggiungere), non può mai risolversi con le sole geometriche operazioni, abbisognandone delle trascendenti. *Ma il più delle volte tornerà assai bene l'adottare una curva trascendente, ed in essa con dè geometrici lavori risolver poi quello.*

§. 78. Così son trascendenti tutti que' Problemi, che il sommo Eulero si propose nella fine della sua Introduzione all' Analisi degl' infiniti, e che quivi colla regola del falso ei (*b*) disciolse mirabilmente. Cioè a dire: *Dividere in due parti uguali un semicerchio per una corda, che passi per un degli estremi del diametro. Bise-*

care

(*a*) Si riscontri l'Opuscolo del sagacissimo Vincenzio Viviani intitolato *Enodatio Problematum Gallicorum*, e stampato nell'anno 1677. Nella pag. 57 di detta Dissertaziona si cita il Trattato *de Locis Solidis* dello stesso autora; ond' è vera la congettura del Sig. Flauti sulla dimostrazione fatta dal Sig. Parent alla Cilindroide. Vedi la Nota *g* a' num. 6. della Continuazione all' Opusc. VIII.

(*b*) Quando mancan de' metodi da poter rimontare al valota di una variabile da quello di una di lei funzione, altro scampo non ci rimane, che di ricorrere all' energica, ed elementare *regola del falso*. La Geometria può indicarci le guide, e la ragioni di ciò, che suol farsi, della qual cosa eccona una geometrica dimostrazione. Si dinoti per $f(x)$ una funzione trascendente della variabile x, e si domandi il valore di questa variabile dall' esser dato quello della $f(x)$, il quale si chiami H. Si esibisca, per poterne intendere un tale disimpegno euristico, la *Tav. VI. Fig. 8.*

curva

care un quadrante per un seno. Ritrovare un settore circolare, che ne resti bisecato dalla corda dell'arco, che gli è di base. Da un dato punto della circonferenza di un cerchio condurvi due corde, che il trisechino ec. Ed i due primi di questi Problemi, come vien osservato dal Valentuomo, riduconsi a ritrovare un arco ϕ uguale al suo coseno. E gli altri due con trigonometriche divise trasformansi nelle seguenti Equazioni $\phi =$ sen. 2ϕ, e $\phi =$ sen. $(60^\circ - \phi)$: e così degli altri. Or cotesti Problemi con tal riduzione si possono elegantemente risolvere combinando una Cicloide volgare con un' altra linea algebrica conveniente (*a*). E la costruzione, che un Geometra ne avrà in ciascuno di essi con accuratezza praticata, potrà indicargli le prossime posizioni, che dovrebbonsi adottare nel risolverlo colla regola del falso.

§. 79. Inoltre cotesto Principio euristico, che potrem dire veracemente non essersi da altri osservato, non che chiarito, o promosso, si potrà proporre in altra guisa assai più generica, e più chiara. Cioè in tal congiuntura *assumasi per postulato un' operazione*

curva ACM tale, che chiamando x una qualunque dilei ascissa AR, ne sia $f(x)$ la corrispondente ordinata RS. Ed oltre a ciò suppongasi esser l' ordinata NM$=$H, e vogliasi il valore della sua ascissa AN. „ Si prendano due falsi valori della AN, cioè AB, ed AD, che si esprimano per a e b, e per A e B quelli delle loro ordinate BC, DE. E preparata la figura, come si vede, sarà CO$=$CB$-$ED$=$B$-$A, MG$=$NM$-$BC$=$H$-$A, ed EO$=$AB$-$AD$=a-b$. Ed essendo CO. EO : : MG : CG, sarà B$-$A : $a-b$: : H$-$A : CG. Dunque dovrà esser $CG=\frac{(H-A)(a-b)}{B-A}$. E quindi $AN=AB+BN=a+\frac{(H-A)(a-B)}{b-A}$. Or chi non vede, che per poter reggere la rapportata analogia debba esser picciolissima non meno la BN, che la BD, e che ne abbisogna conoscere due punti prossimi al vero?

(*a*) Vedi i Probl. di tal genere quassù risoluti.

ne trascendente, e poi si distenda la soluzione del Problema con eseguirvi altre operazioni puramente geometriche, e convenienti. Imperciocchè siccome l'è folle impresa il voler geometricamente risolvere un Problema, che di sua natura è trascendente; così sarebbe un'opera fabrile, ed ageometrica il risolver quello con un treno di meccaniche, e manuali operazioni. In ciò ne basta una sola trascendentale operazione, che dia mano ad altre geometriche convenienti. O che, descritta una curva trascendente, si vada su tal soggetto geometricamente di poi operando. Or tal n'è stata la condotta de'sommi Geometri dell'antichità rimota, e di alcuni tra recenti, nel risolvere cotesta specie di Problemi, tuttochè ne abbiano celato il modo, e le ragioni (*a*).

§. 80. Ma oltre a quelle geometriche operazioni, che appajono dagli Elementi, ve ne ha delle altre più sublimi, e da potersi anche quì congruamente adottare. Ed in vero da che il chiarissimo Ugenio escogitò l'*Evolute*, e 'l sommo Leibnitz le *Curve parallele*, sì le une, che le altre furon ricevute in Geometria, e si ebber quindi per geometrici que'lavori, che dipendono dall'esibirle. Il dividere un arco di cerchio in una ragion razionale l'è anche un Problema geometrico, o da un'Equazione algebrica definito. Il condurre una tangente ad una curva algebrica da un punto dato, o il condurle da esso la normale, ec. sono anche operazioni di una medesima indole. Onde con tal guida potremo risolvere varj Problemi di tal natura: e potrem benanche iniziarci ad isnodar quello tra essi di sì difficil tempra, che avendo abbaccinato il Sig. de Tschirnausen illustre Geometra delle Poloniche regioni, di nobil desìo gli animi ne accese de' Matematici di quel tempo, tra'quali ve n'eran de' valentissimi, e de' sagaci oltremodo. *Vuolsi dividere*, eccone la divisa del Problema, *in una ragione razionale, o irrazionale una curva non retti-*

(a) Si legga il citato Opuscolo del Viviani, per poter rilevare il detto artifizio.

rettificabile. Il Sig. Bernulli maestro de' Geometri del continente sì n' espresse il di loro impegno. *Ardenter desideramus publicationem methodi universalis, cujus se compotem dicit* (Tschirnausius), *in qualibet curva, data portione ejusdem, aliam semper assignandi, quae datam rationem ad priorem obtinet... Quin imo totum Mathematicorum orbem sibi obstringet, et aeternam laudem merebitur, si dabit demonstrationem in parabola*. E noi ne adombreremo la soluzione.

Tav. VI. Fig. 7. §. 81. *Sia dunque data la curva* AC *non rettificabile, e vogliasi dividerla in* B *nella data ragione di m ad n*. I. Si tiri all'estremo A di cotesta curva la tangente indefinita AN. II. Di poi si tolga da tal retta la parte AN uguale alla curva ABC: ed in questa operazione trascendente potrem riuscirci con far rotare la curva ABC sulla tangente AP, come per le Cicloidi suol praticarsi. III. Si divida la NA in M nella data ragione, cioè che stia AM : MN :: *m* : *n*. IV. Si applichi al convesso della data curva ABC un filo flessibile uguale ad AN, il quale sviluppandosi da essa curva da C verso N ne descriva col suo estremo C l'evoluta CN. V. Si conduca per M la curva MB parallela alla NC, che incontri in B la data curva. Sarà AB : BC :: *m* : *n*. Or in queste operazioni la seconda solamente è trascendentale, e le altre son geometriche: onde l'addotta soluzione è conforme al metodo prescritto. E si rinverrebbe lo stesso, se dal punto M si conducesse la normale a quella curva cicloidica, che si descriverebbe dal punto A nel ruotar la curva ABC sulla di lei tangente AP. Ma di ciò in altri Opuscoli converrà più diffusamente ragionare.

D I L U C I D A Z I O N E IV.

§. 82. Era conveniente in quest' ultima dilucidazione risolvere col metodo Cartesiano, e colla Geometria analitica a due coordinate il Problema duodecimo di già sinteticamente da noi risoluto; affinchè dal parallelo di coteste due soluzioni si potesse conoscer chia-

chiaramente, qual di que' due metodi abbiasi ad avere per più pregevole, e più fido. Or la prima di queste due soluzioni fu eseguita da un Giovane di nostra Scuola: e l'altra da quel Professore dell'Alta Italia di cui già più sopra si è parlato. E per ricordarne quel Problema quì alquanto modificato, *sien dati di posizione il punto* P, *e le due curve algebriche* RAN, ran; *condurre da quel punto su queste curve le due incidenti* PN, *e* Pn, *le quali sieno nella data ragione di* de *ad* fe, *e comprendano l'angolo dato* def. *Tav. VI. Fig. 11.*

Soluzione del Problema colla Geometria Cartesiana.

§. 83. Dal punto P conducasi la PC, come ne piace; e poi nel punto P di questa retta si formi l'angolo CPc uguale al dato def. E da' richiesti punti N, ed n si abbassino le NM, ed nm perpendicolari alle PC, e Pc rispettivamente. Inoltre pongasi PM$=x$, MN$=y$, P$m=v$, ed $mn=z$. E sia in primo luogo la y una funzione esplicita della x, che noi dinotiamo per $f(x)$: e la z suppongasi esser benanche una funzione esplicita della v, che indicheremo per F (v). Sarà chiaro dover essere il triangolo rettangolo PMN simile all'altro Pmn: imperocchè essendo l'angolo CPc uguale all'altro NPn, toltovi di comune l'angolo NPm, dee restare l'angolo MPN uguale all'altro mPn. Il perchè, se la data ragione di de ad fe, o di PN a Pn si esibisca per quella di $1:h$; sarà anche PM : Pm : : $1:h$, ed MN : mn : : $1:h$. Dunque sarà P$m=hx$, $nm=$F(hx); e quindi per la seconda di queste due analogie ne verrà $hf(x)=\text{F}(hx)$. Ch'è l'Equazione finale del Problema.

Cas. II. Che se le y e z non sieno funzioni esplicite delle x ed v rispettivemente, converrà praticare in tal caso il seguente metodo. L'Equazione della curva RAN rapportata alle coordinate rettangole PM ed MN sia generalmente $a+bx+cy+dxy+exx \ldots\ldots +\text{V}y^n=0$. E quella per la seconda curva ran benanche rapportata alle coordinate ortogonali Pm ed mn sia $\text{A}+\text{B}v+\text{C}z+\text{D}vz+\text{E}vv\ldots\ldots+\text{T}z^n=0$.

E poi

E poi in quesra seconda Equazione si ponga hx per v; ed hy per z; si otterrà questa terza $A+Bhx+Chy+Dhhxy+Ehhyy....+Th^{n}y^{n}=0$, la quale combinata geometricamente colla prima di quelle due darà i punti richiesti.

Soluzione del medesimo Problema eseguita colla Geometria Analitica a due Coordinate (*a*).

Tav. VI. Fig. 12. §. 84. „ *Essendo date le due curve* MN *e* PQ, *ed il punto* D; *si* „ *domandan due punti tali*, *che le rette* DF, *e* DE *condotte dal* „ *punto* D *a' punti* F, *ed* E *facciano un angolo dato chiamato* φ. *Si* „ *suppone inoltre*, *che si conosca il rapporto delle linee* DF, e DE.

„ *Solus.* Si possono rapportare le due curve a due coordinate „ perpendicolari AB, AC. Sia dunque $F(x,y)=0$ l'Equazione „ della curva PQ rapportata a queste coordinate. E $\Psi(v,t)=0$ „ l'Equazione della seconda curva MN rapportata alle stesse coor- „ dinate. Si abbassi dal punto D la perpendicolare DG, e facciasi „ $AG=a$, $DG=b$. Ciò posto si supponga per un momento il „ Problema sciolto, ed uniscansi i punti E, ed F. Facciamo $DE=p$, „ $DF=q$, $FE=r$, e $p:q=m$. Secondo l'enunciazione del Pro- „ blema si dee considerare come data la quantità m. Dopo questo „ è facile di mettere il Problema in Equazione. Tirinsi da' punti „ E, ed F le linee EK, FL parallele ad AB. Secondo la proprietà „ del triangolo rettangolo avremo

$$p=\sqrt{(b-v)^2+(t-a)^2}$$

$$q=\sqrt{(b-y)^2+(x-a)^2}$$

$$r=\sqrt{(y-v)^2+(t-x)^2}$$

„ Ri-

(a) Questa soluzione è rilevata da una lettera di quel Professore Italiano diretta al nostro Signor Scorza.

„ Ricordiamoci ora, che esiste una formola notissima per calcolare „ l'angolo di un triangolo conoscendone i lati. E chiamando s la „ quantità $p+q+r$, si avrà

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{(\frac{1}{2}s-p)(\frac{1}{2}s-q)}{pq}\right)} \qquad \text{A}$$

„ Si unisca quest'Equazione a quest'altra

$$\sqrt{\left(\frac{(h-v)^2+(t-z)^2}{(b-y)^2+(x-z)^2}\right)} = m \qquad \text{B}$$

„ e si avrà quanto è necessario per risolvere il Problema; giacchè „ l'Equazioni date delle curve

$$F\,(x,y) = 0 \qquad \text{C, e}$$

$$\psi\,(v,t) = 0 \qquad \text{D}$$

„ servono ad eliminare v, ed y da queste Equazioni. E si avranno „ no in ultima analisi due Equazioni, e due incognite. E cono„ scendo queste due Equazioni si potrà far uso della Geometria per „ determinarne le incognite.

„ Parmi di avere in questo modo sciolto un Problema più gene„ rale del propostomi: giacchè considero due curve qualunque in „ vece di prendere il cerchio, ed una curva trascendente. "

§. 85. Noi lodiamo le divise puramente algebriche, onde si è condotto quest'Analista a risolvere co' metodi moderni il proposto geometrico Problema. E speriamo, ch'ei non si dolga delle riflessioni, che su quel processo analitico quaggiù distendiamo, non già per adontarlo; ma per poter l'energie de' metodi risolutivi graduare.

§. 86. Ed in primo luogo l'Equazione A liberata da' radicali dee montare ad un grado assai alto. E di qual grado sarà quell'altra, che dall'eliminarvi dall'Equazioni A, B, C, D le v, ed y di poi n'emerge? Egli confessò sinceramente abbisognarne più volumi a distender l'abozzata soluzione, ed a darle un tipo *costruibile*. Ed oltre a ciò, se mai si usino i metodi anteriori al Bezout per proccurarne l'anzidetta eliminazione, nel risultato dovran

OPUSCOLO XI.

Continuazione dello stesso Argomento.

§. 89. I moderni Analisti sogliono classificare i Problemi di Geometria da' gradi dell'Equazioni, che vi si traggono. Ma le Greche Scuole, che non sapevan punto che mai si fosser coteste Equazioni, e come in esse si avesser potuto tradurre quei Problemi, li distinsero dagli artifizj di costruzione, che doveansi specialmente usare in risolvendoli. Infatti Pappo Alessandrino, fedele depositario del greco geometrizzare (a), in due luoghi delle sue Matematiche Collezioni, così ragiona su tal soggetto. *Problemata, quæ per rectas lineas, & circuli circumferentiam solvi possunt, dicuntur plana... Quaecumque vero solvuntur, assunta in constructionem aliqua coni sectione, vel etiam pluribus, solida appellata sunt... Relinquitur tertium genus Problematum, quod lineare appellatur, lineæ enim aliæ præter jam dictas in constructionem assumuntur.*

§. 90. Or sebbene tutto ciò sia stato saggiamente da que' Geometri proposto; nondimeno avrebbesi dovuto dire più accuratamente, che un Problema sia solido, se i punti soddisfacenti ne sien segnati dalle intersezioni di due curve coniche. E così de' lineari convenevolmente. Imperciocchè, se nel costruire un Problema si usino conducimenti di rette, e descrizioni di cerchi solamente, e queste linee vi segnino in una curva data, che sia di un qualunque grado

 o an-

(a) Lib. III. Prop. 4., e Lib. IV. Prop. 30.

o anche trascendente, i punti, che si domandano; ei certamente sarà *solido*, *o lineare*, tuttochè la costruzione sia simile a quella de' Problemi piani. E da ciò abbiam presa occasione di esaminare una specie di Problemi, che in realtà sono *Solidi*, *Ipersolidi*, o *Trascendenti*, e che pajon risoluti alla maniera de' Problemi piani, per vi si condurre rette, e descriver cerchi solamente (*a*).

§. 91. Così se diansi di posizione due cerchi, ed una qualunque curva algebrica, o trascendente, e si voglia in questa rinvenire un punto, di dove le tangenti menate a que' due cerchi sieno in una ragion data; un tal Problema sarà disciolto a guisa de' Problemi Piani, sol che descrivasi quel cerchio, ch'è della proposta condizione la locale (*b*). Similmente un cerchio basterebbe a segnare in una data superficie uniforme, difforme, algebrica, o trascendente i punti, che deggianvi avere la seguente condizione: cioè che le rette condotte da ciascuno di essi a tre punti dati sien proporzionali a tre rette date. E generalmente, se in una qualunque curva, o in una qualsiasi superficie si addimandi un punto soddisfacente a più condizioni, le quali si rilevino in un luogo piano; la combinazione di questo, e di quella linea, o di quella superficie darà il punto richiesto, o più di essi, se pur sien tali.

§. 92. Ma prima di andar proponendo più Problemi, che in tal modo verrebbero con eleganza risoluti, è bene autorizzare un tal Metodo colla condotta, che in simili casi han saggiamente tenuto i due sommi Geometri il Cavaliere Isacco Newton, e Renato delle Carte.

(a) Niuno cavilli sul proposto artificio, quasichè si volessero i Problemi Solidi, Ipersolidi, e Trascendenti ridurre a' Problemi Piani. Del che vedi il §. 2. della Prefazione, e tutto quell'altro, che sarem per dire quì appresso.

(b) Ciò può rilevarsi da' Luoghi Piani di Apollonio, o coll'Analisi Moderna facilmente.

Carte . Onde sulle prime descriveremo l'Analisi Geometrica , che dovè seguire il sommo Newton nella Prop. 30. lib. I. Princ. Mat. E poi rivolgendoci al Cartesio commenteremo le sue geometriche costruzioni de' Problemi Solidi , che da' Moderni diconsi di terzo ; o di quarto grado.

PROP. XXII. PROBL.

§. 93. *Dal fuoco O della Parabola ACS vuol condursi il ramo SO; che ne tronchi il trilineo parabolico ASO uguale ad un dato rettangolo , che quì per comodo dell'Analisi Geometrica supponesi uguale a quello di 4AO nella retta R.*

ANALISI GEOMETRICA.

Si bisechi nel punto T la retta AO , cui si elevi da T la perpendicolare TF uguale alla 6R . E supposto esserne il punto S quello che si richiede , si ordini all' asse della Parabola la SQ : si compia il parallelogrammo TQSN : e finalmente si bisechi in M la TF. *Tav. VI. Fig. 13.*

E poichè l' aja parabolica AQS è uguale al rettangolo di $\frac{2}{3}$QS in AQ , o a queste di lui parti $\frac{2}{3}$QS in AO , e $\frac{4}{6}$QS in QO ; toltovi d' ambe le parti il triangolo OQS , o il rettangolo di $\frac{3}{6}$QS in QO , dovrà rimanervi il trilineo parabolico AOS , cioè il rettangolo di 4AO in R , uguale a' due rettangoli di $\frac{2}{3}$QS in AO , e di $\frac{1}{6}$QS in QO . E prendendone i loro sestupli sarà 4AO . 6R uguale a 4QS . AO + QS . QO : cioè 4AO (6R — QS) uguale a QS . QO ; ovvero 4AO . NF uguale a QS . QO , per esser la NF uguale a TF — TN , o a 6R — QS . Dunque sarà QO : NF :: 4AO : QS :: QS : AQ . E sarà quindi il rettangolo AQO uguale all' altro TNF : ed aggiungendo ad essi di comune TO^2, sarà poi TQ^2, o SN^2 ugua-

le ed

le ad $MO^2 - MN^2$. Per la qual cosa l' ignoto punto S appartiensi ad un cerchio descrittovi col centro M intervallo MT: ond'ei dovrà ritrovarsi nell' intersezione del detto cerchio, e della Parabola proposta.

§. 94. *Scol.* La costruzione di questo Problema avrebbesi potuto eseguire in un più facil modo, combinando un'iperbole tra gli assintoti colla data Parabola ACS. Infatti si chiamino x ed y le coordinate AQ, QS, che nella data Parabola corrispondono all' ignoto punto S, e poi si ponga $AO = a$, e quel dato rettangolo uguale ad ab; sarà l'aja parabolica $AQS = \frac{2}{3}xy$, il triangolo $OQS = \frac{1}{2}y(x-a)$, e quindi il trilineo parabolico $ASO = \frac{1}{6}xy - \frac{1}{2}ay$. Dunque per le condizioni del Problema dovrà essere $xy - 3ay = 6ab$. Ed una tal Equazione è all' Iperbole tra gli assintoti, cioè alla locale da doversi colla Parabola ACS combinare, affin di rinvenirne l' ignoto punto S. Ma questa soluzione, che vedesi più semplice della precedente, di essa n'è men preclara. Da poichè in quella impiegasi la descrizione di un cerchio, cioè un postulato Euclideo, per poterne segnare nella Parabola data il punto, che si domanda. Le costruzioni Cartesiane delle cubiche, e biquadratiche Equazioni han pure un simil pregio, che or ora ci faremo a rilevarlo.

Principio Cartesiano.

§. 95. *La composizione geometrica di un Problema Solido tiensi per elegante dal Signor delle Carte, qualor si esegua col combinare insieme una data Parabola, ed un Cerchio. Del che eccone le ragioni principali.*

L' Equazione alla Parabola è la più semplice tra quelle, che assegnansi alle curve coniche rapportate a' loro diametri: perciocchè ella non è che binomia, e di due dimensioni, cioè $yy = px$: ove

ove la y disegni una qualunque semiordinaria all'asse, la x la sua corrispondente ascissa, e la p il di lui parametro. Inoltre il perimetro di questa curva può facilmente disegnarsi con moto organico in un piano. E la di lei genesi per sezione l'è anche chiara, agevole, e precisa. Ma un'Equazione cubica, o biquadratica si costruisce alla maniera Cartesiana col combinare una data Parabola, ed un Cerchio. Dunque son facili coteste costruzioni; e son poi chiare le dimostrazioni, che talor vi si aggiungono: come quelle, che fluiscono dalle note proprietà del cerchio, e dall'agevole analogia, in che risolvesi la detta Equazione alla Parabola.

II. Di più il numero delle intersezioni della detta Parabola, e del Cerchio è sempre uguale al numero delle radici reali dell'Equazione cubica, o biquadrica, che vi si costruisce in tal modo. Nè quindi può temersi, che il numero di quelle sia del numero di queste maggiore, o minore, come in altre combinazioni di curve avvenir suole.

III. Finalmente, sol che sappiasi con esattezza descrivere una Parabola in un piano, potrem rilevare le radici reali di una qualunque cubica, o biquadratica Equazione, combinando con quella curva un cerchio di convenevol raggio, e posizione. E quindi assumendo per l'unità delle linee il parametro principale della Parabola anzidetta, le altre geometriche operazioni, che converrà eseguire per rinvenirne quelle radici, si vedran ridotte alle sole elementari, e da potersi ottenere *circino, et regula*. E così questi Problemi Solidi nulla perdendo di lor natura, si vedran risoluti alla maniera de' Problemi Piani.

ME-

Metodo Newtoniano.

§. 96. Il sommo Newton per lo contrario è di parere; che per elegantemente risolvere un Problema Solido vi si debba combinare col Circolo un' Ellisse, che fra le tre curve coniche è la più facile ad essere organicamente designata. Ed in ciò ei pretende di preferire una manuale, e comoda operazione alle pure geometriche speculazioni (a).

La parte essenziale della soluzione di un geometrico Problema, ecco quel ch' ei ne dice, non è che la costruzione. E questa deesi riputar tanto più elegante, quanto l' è più semplice. Dunque nel costruire un Problema Solido fia meglio, in parità di altre cose, il combinarvi col cerchio un' Ellisse, che una Parabola: essendo più semplice la descrizione organica della prima di queste due curve, che

(a) L' Abate D. Nicolangelo Adamo istitutore nella nostra Scuola stampò, son oramai 20 anni, un elegante Opuscolo su certe verità Ciclometriche: e quivi tralle altre cose vien recata la trisezione di un arco dato col combinarvi il dato cerchio con un' Ellisse alla maniera Newtoniana. E l' autore di cotesta accurata soluzione, è il nostro Sig. Ponticelli.

che dell'altra. Nè dovrà ostarci, che la natura, o l'Equazione alla Parabola sia più semplice di quella dell'Ellisse. Poichè quì non si attende, che alla semplicità della genesi di una curva, e non a quella della dilei natura: nè poi dall'una cosa può l'altra valutarsi. L'Equazione ad una curva è il rapporto, che han fra loro le di lei coordinate, o l'aritmetico valore, che ha una di esse rispetto all'altra. Laddove la genesi organica di tal curva è quella operazione manuale, onde ne riesce di segnare il perimetro di essa in un piano. E chi non sa, che dalla semplicità di una di queste due cose non debbasi la semplicità dell'altra inferire? Così l'Equazione alla Parabola è assai più semplice di quella, ch'è al cerchio: e pure la descrizione di un cerchio è un Postulato di Geometria. L'Equazioni all'Ellisse, ed all'Iperbole son pariformi: e non pertanto la genesi della prima di queste due curve l'è assai più facile di quella della seconda. Che anzi l'Equazione alla Cicloide è trascendente: e tutti convengono, che sia semplicissimo il modo organico di descriver tal curva, e che si possa comodamente impiegarla nel dividere un angolo in una qualunque ragione razionale. ec.

§. 97. Intanto in questi dispareri tra i due sommi Geometri delle cultissime nazioni Anglicana, e Francese, a qual di essi ci atterremo? E qual cosa potrà aggiungersi a pro del Cartesio pel nostro intento?

§. 98. Le operazioni, che si prescrivono in Geometria, debbonsi più dalla mente, che dalla mano del Geometra eseguire. Perciocchè i Dati di un Geometrico Problema possono esser grandezze sì picciole, che si sottraggano da' nostri sensi; o pur sì grandi, o in tal posizione, che la mano dell'uomo non possa prestarsi ad operarvi. In tali casi basterà col solo pensiero su grandezze analoghe geometrizzare. Infatti s'io proponessi a' Geometri di [illegible] la di-

stanza

stanza de' centri di due astri, o a farne su questa retta qualche altra geometrica operazione, chi di loro imprenderebbe la riga, e 'l compasso per irne in su i Cieli a sciogliere il Problema? Il saggio Euclide per non restringer grandemente il pomerio delle geometriche grandezze si accordò co' Geometri di poter condurre rette, e descriver cerchi. E certi incauti Euclidei vi han sostituita la riga, e 'l compasso, che per altro appartengonsi a pochissime grandezze, e son di esse guide mal sicure. Ed anzi la *Geometria da tavolino*, che oltre agl' indicati istrumenti ci offre un apparato di *grafometri*, *semicerchi graduati*, *pantografi*, *compassi ellittici*, ec. non è più una scienza, ma un' arte.

§ 99. E quindi se lo spirito Euclideo c' impone a dover delle grandezze geometrizzare, senza frapporvi alcuna manuale operazione, cui per altro il sommo Newton (*a*) destinò il metodo proposto, noi potrem contentarci della genesi della Parabola *per sezione*, la quale è ugualmente precisa, che quella dell' Ellisse. E le costruzioni delle cubiche, e biquadratiche Equazioni, che si vorran fare, combinando una data Parabola, ed un Cerchio, dovranno aversi per eleganti: e per nitide le composizioni di que' Problemi, onde le dette Equazioni furon tratte. Ma, quel che più rileva, nel metodo Cartesiano evitasi quell' indicato inconveniente, che nell' altro metodo può incontrarsi, cioè *di ottenere più, o meno d' intersezioni nelle curve combinate, che* (*b*) *nol sieno le radici reali dell' Equazione*

geo-

(*a*) Leggasi il sommo Newton nella Costruzione lineare dell' Equazioni § [illegible] in fin.

(*b*) Ecco quel che s' insegna su questa Teoria. *Dalla combinazione di due di certe locali deve sempre seguirne il loro incontro, se in una di esse la y sia uguale ad un' espressione razionale della x, o possa divenir tale. E sarà dubbioso un tal incontro, se la y ascenda solamente a quadrato nell' Equazioni di dette locali, o se eliminandone da esse yy vi si sciolga parimente la y.*

geometricamente costruita. E finalmente data una Parabola si potran da essa ottenere geometricamente le radici reali di una cubica, e biquadratica Equazione, sol che vi si descriva un convenevol cerchio. Ed assumendosi per postulato la descrizione di quella curva, che abbia un dato parametro principale; le altre operazioni, che converrà poi eseguire a tal uopo, saranno meramente elementari: onde i Problemi Solidi parranno risoluti a guisa de' Problemi Piani. Ed in ciò il merito, e la prevalenza del metodo Cartesiano potrà chiaramente dimostrarsi.

§. 100. Frasi da noi determinato di por fine a questo argomento con proporvi una serie di utili Problemi Solidi, Ipersolidi, e Trascendenti, i cui dati e quesiti non già consistessero in un piano, ma nello spazio: e così chiarire le Teorie in questi tre Opuscoli esibite (a). Ma in tal modo cotesto lavoro sarebbe cresciuto fuor misura. E da que' Problemi, che vi si trovan dispersi, ne potranno tanti altri germinare in mente a coloro, che l'arte posseggono di saper proporre, e sciogliere i Problemi.

GIUDIZIO DEGLI EDITORI.

Quella parte del *Luogo Risoluto* detto dagli Antichi *περὶ νεύσεων*, *sive de inclinationibus*, non dovea contenere una ristretta famiglia di facili Problemi, quali vengon da Pappo indicati, e da

(a) Noi ne addurremo uno tra questi Problemi, cioè *date due curve, che non giacciano in un medesimo piano, come se fossero le Orbite di due Pianeti, condurre fra i perimetri di esse una retta data di grandezza, e di posizione*.

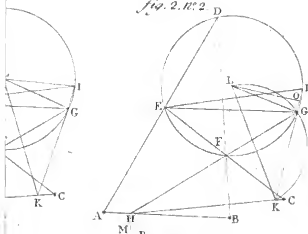
moderni Geometri risoluti; ma dovea anche proporre il modo di ridurvi tanti altri malagevoli Problemi, e di chiaramente classificarli. Percioccchè noi abbiamo altrove dimostrato, ciò che in quell' Opera avrebbesi dovuto contenere, che *tutti i Problemi Piani riducansi ad applicare tra due date parallele, o tra la circonferenza di un dato cerchio una retta data di grandezza, che convergesse ad un punto dato*. E che *i Problemi Solidi si riducano a situare tra due rette inclinate un' altra retta data, che passasse per un dato punto*.

Di quì sorgon le Teorie *delle Inflesse, e delle Incidenti*: l' indagine delle curve, che nascono dal concorso di quelle, o da una simile divisione di queste, da un certo moto continuo, dall' assumersi per Coordinate le variabili socie di una curva data, o in altri modi. Ed una congerie di Problemi, che non son mica agevoli o inutili, vi si trovan risoluti a distesa, o con rimetterli ad altri di già risoluti: e del merito delle loro soluzioni geometriche, o analitiche potran deciderne i Savj. Ma oltre a queste cose n' è commendevole quel chiarimento del Metodo, onde si sogliono risolvere in Geometria, o coll' Aritmetica volgare i Problemi Trascendenti. E poi dalla definizione di Pappo de' Problemi Piani, Solidi, e Lineari n' è sorto l' ultimo di questi tre Opuscoli, ove contiensi uno speciosissimo geometrico Paradosso, che *certi Problemi non sieno piani di lor natura, sebbene non vi si veggan praticate altre operazioni, che le sole elementari*. In tal congiuntura si è commentato il Metodo Cartesiano nel costruire l' Equazioni cubiche, e biquadratiche. E vi si può rigidamente dimostrare dalle indicate difinizioni quel Principio, cui gli antichi Geometri solevan ridurre i Problemi Piani, e quegli altri, che Solidi n' eran detti.

FINE DEL I.° VOLUME.



Tav. I.


fig. 2. n.° 2
D
I
G
C
K
L
O
E
F
A
H
B

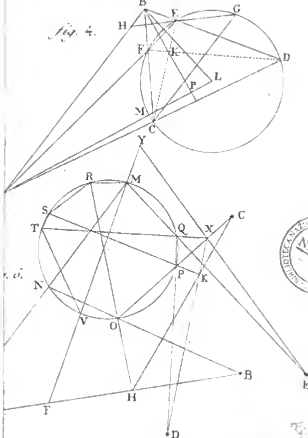

fig. 4.
M
B
E
G
H
F
K
D
L
P
C
Y
R
S
T
Q
X
C
P
K
N
V
O
B
E
F
H
D



fig. 2.

N D E L G Q F R M O C A K B

fig. 3.

O P Q D H f E g A F S G B

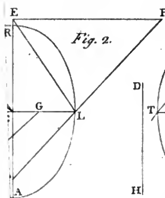
fig. 5.

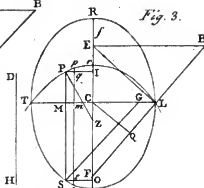
N K H M G O A

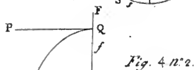
Tav. III.

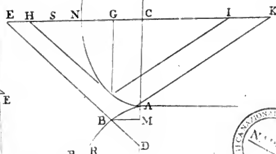
fig. 2.

fig. 4.

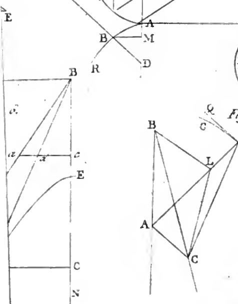

E
B
R
Fig. 2.
G
L
A


R
Fig. 3.
f
E
B
P
p
r
I
q
D
T
C
G
L
M
m
Z
Q
F
S
O
H


F
P
Q
f
Fig. 4 n.° 2.


E
H
S
N
G
C
I
K
A
B
M
R
D




E
B
a
x
c
E
C
N

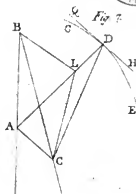

Q
Fig. 7.
G
B
D
L
H
A
E
C

Fig. 2.

Fig. 3.

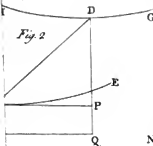
Fig. 6.

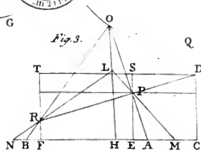
Fig. 7.

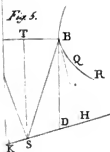
Fig. 9.

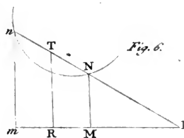
Fig. 10.

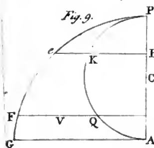


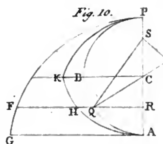

Fig. 2
I
D
G
E
P
Q

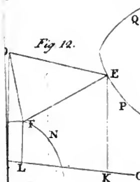

Fig. 3.
O
Q
T
L
S
D
P
R
N
B
F
H
E
A
M
C

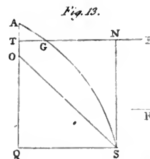

Fig. 5.
T
B
Q
R
D
H
K
S


n
T
Fig. 6.
N
m
R
M
l


Fig. 9.
P
e
K
B
C
F
V
Q
G
A


Fig. 10.
P
S
K
B
C
F
H
Q
R
G
A


Q
Fig 12.
E
P
F
N
L
K
C


Fig. 13.
A
T
G
N
F
O
R
Q
S



